

(1) . حساب  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$  :

نضع  $X = \frac{1}{x}$ . إذا كان  $x$  يؤول إلى 0 على اليسار فإن  $X$  يؤول إلى  $-\infty$  .

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left( -\frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} \right) \quad \text{إذن :} \\ &= \lim_{X \rightarrow -\infty} (-X e^X) \\ &= - \lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = 0$

. نبين أن  $f$  متصلة في صفر.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) \quad \text{و} \quad f(0) = 0 \\ &= 0 \\ &= f(0) \end{aligned}$$

إذن  $f$  متصلة في صفر.

(2) دراسة قابلية اشتقاق  $f$  في النقطة  $x_0 = 0$

. نضع  $X = \frac{1}{x}$  ، إذا كان  $x$  يؤول إلى صفر على اليسار فإن  $X$  يؤول إلى  $-\infty$  .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-\frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} - 0}{x}$$

$$= - \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

$$= - \lim_{X \rightarrow -\infty} X^2 e^X$$

$$= -4 \lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{X^2}{4} \left( e^{\frac{X}{2}} \right)^2$$

$$\begin{aligned} &= -4 \lim_{X \rightarrow -\infty} \left( \frac{X}{2} e^{\frac{X}{2}} \right)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه  $f$  قابلة للاشتقاق على اليسار في صفر و  $f'_g(0) = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2 + \ln(1+x)}{x} \quad \text{لدينا :} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left( x + \frac{\ln(1+x)}{x} \right) \\ &= 1 \quad \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ لأن } \right) \end{aligned}$$

ومنه  $f'_d(0) = 1$  و  $f'_g(0) \neq f'_d(0)$  فإن  $f$  غير قابلة للإشتقاق في النقطة  $x_0 = 0$

(3) لاحظ أن  $D_f = \mathbb{R}$

\* نحدد النهايات عند محداث  $D_f$  :

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ فإن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} \right) = 0$$

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty \text{ فإن :}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln(1+x)) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

\* حساب  $f'(x)$  مع تحديد إشارتها :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} \left( -\frac{1}{x^2} \right) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad \text{لكل } x < 0 \\ &= \left( \frac{x+1}{x} \right) \left( \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{بما أن } \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} > 0 \text{ لكل } x < 0 \text{ فإن إشارة } f'(x) \text{ هي إشارة } \frac{x+1}{x}$$

على المجال  $]-\infty, 0[$  .

ومنه : إذا كان  $-1 < x < 0$  فإن  $f'(x) < 0$  وإذا كان  $x < -1$

فإن  $f'(x) > 0$  وإذا كان  $x = -1$  فإن  $f'(x) = 0$

$$\text{لكل } x \geq 0 : f'(x) = 2x + \frac{1}{1+x} > 0$$

جدول تغيرات  $f$  :

| x       | $-\infty$ | -1            | 0 | $+\infty$ |
|---------|-----------|---------------|---|-----------|
| $f'(x)$ | +         | ○             | 0 | 1         |
| $f(x)$  | 0         | $\frac{1}{e}$ | 0 | $+\infty$ |

(4) أ- بما أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  فإن محور الأفاسيل مقارب للمنحنى

(ج) جوار  $-\infty$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  . ندرس إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

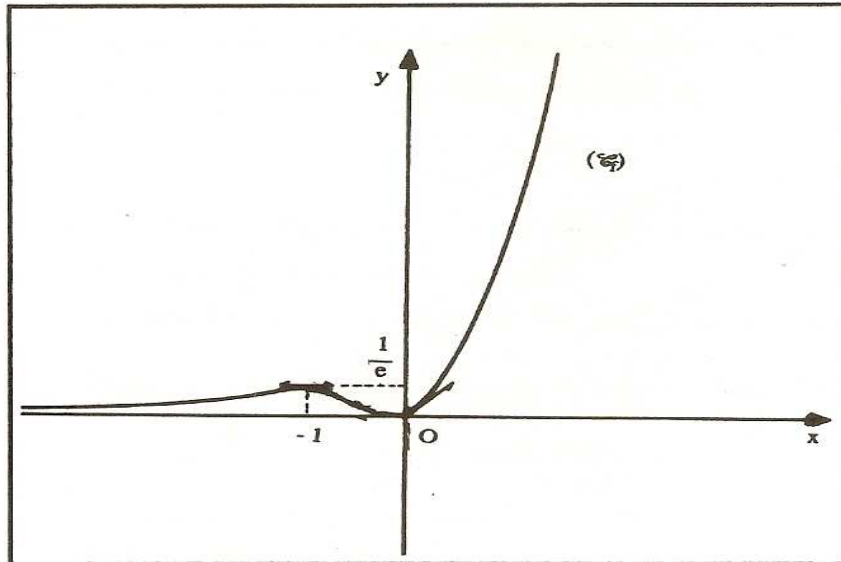
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \ln(1+x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \frac{x+1}{x} \cdot \frac{\ln(1+x)}{1+x} \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\left( \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \text{ لأن } \right)$$

وهذا يعني أن المنحنى (ج) يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأرتيب

جوار  $+\infty$

ب-



(5) أ- نضع  $t = \frac{2}{x}$  إذن :  $dt = -\frac{2}{x^2} dx$

إذا كان  $x = \alpha$  فإن  $t = \frac{2}{\alpha}$  وإذا كان  $x = -1$  فإن  $t = -2$

$$V(\alpha) = \pi \int_{\alpha}^{-1} f^2(x) dx \quad \text{ومنه :}$$

$$= \pi \int_{\alpha}^{-1} \frac{1}{x^2} e^{\frac{2}{x}} dx$$

$$= -\frac{\pi}{2} \int_{\alpha}^{-1} -\frac{2}{x^2} e^{\frac{2}{x}} dx$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\pi}{2} \int_{\frac{2}{\alpha}}^{-2} e^t dt \\ &= -\frac{\pi}{2} [e^t]_{\frac{2}{\alpha}}^{-2} \\ &= -\frac{\pi}{2} \left( e^{-2} - e^{\frac{2}{\alpha}} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left( e^{\frac{2}{\alpha}} - e^{-2} \right) \end{aligned}$$

ب- لدينا :  $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{2}{\alpha} = 0$  إذن  $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} e^{\frac{2}{\alpha}} = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} V(\alpha) &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{\pi}{2} \left( e^{\frac{2}{\alpha}} - e^{-2} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{e^2} \right) \\ &= \frac{\pi(e^2 - 1)}{2e^2} \end{aligned}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} V(\alpha) = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2e^2} \quad \text{وبالتالي :}$$



إجتز الامتحان الوطني بكل نجاح مع الشامل

مع تحيات Equipe Achamel

Achamel