

(I) حساب النهايات عند محداث $D_g =] 0, + \infty [$

. لدينا : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1 - x) = 1$ و $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = - \infty$

إذن $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1 - x + \ln x) = - \infty$

. لدينا $\lim_{x \rightarrow + \infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow + \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

إذن : $\lim_{x \rightarrow + \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow + \infty} x \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x} \right) = - \infty$

- حساب $g'(x)$:

$$(\forall x \in] 0, + \infty [) : g'(x) = - 1 + \frac{1}{x} = \frac{1 - x}{x}$$

. بما أن $x > 0$ فإن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $1 - x$ في المجال $] 0, + \infty [$.
ومنه جدول تغيرات الدالة g :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

(2) من خلال جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أن $g(x)$ تنتمي الى المجال $] - \infty, 0 [$ لكل x من $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$ وهذا يعني أن $g(x)$ سالبة قطعا مهما

يكن x من $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$ (II)

(1) لاحظ أن $D_f = [0, +\infty[$

أ- لدينا : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0$ و $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} \ln \sqrt{x} = 0$

إذن : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\sqrt{x} \ln x - x)$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2 \sqrt{x} \ln \sqrt{x} - x)$$

$$= 0$$

$$= f(0)$$

وبالتالي f متصلة على اليمين في 0 .

ب- لدينا : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ و $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

إذن : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x} \ln x - x}{x}$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \ln x - 1 \right)$$

$$= -\infty$$

وهذا يعني أن f غير قابلة للإشتقاق على اليمين في 0

(2) أ- لكل x من $\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = \sqrt{x} \ln x - x$$

$$= x \left(\frac{\sqrt{x} \ln x}{x} - 1 \right)$$

$$= x \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} - 1 \right)$$

$$= x \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - 1 \right) \quad (\ln x = 2 \ln \sqrt{x} \text{ لأن})$$

• استنتاج نهاية f عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - 1 \right) = -1 \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0 \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - 1 \right) = -\infty \quad \text{ومنه :}$$

ب- ندرس نهاية $\frac{f(x)}{x}$ عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - 1 = -1$$

• ندرس نهاية $(f(x) + x)$ عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \ln x = +\infty$$

إذن المنحنى $\mathcal{C}$ يقبل فرعاً شلجياً في اتجاه المستقيم ذي المعادلة :

$$y = -x \quad \text{بجوار} \quad +\infty$$

(3) أ- لكل x من $\mathbb{R}^{*+}$:

$$f'(x) = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} - 1$$

$$= \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$$

$$= \frac{\ln \sqrt{x} + 1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} g(\sqrt{x})$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} g(\sqrt{x}) \quad \text{وبالتالي لكل } x \text{ من } \mathbb{R}_+^* :$$

ب- • إذا كان x ينتمي إلى $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$ فإن $\sqrt{x}$ ينتمي إلى $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$

إذن $g(\sqrt{x}) < 0$ وذلك حسب السؤال (I - 2)

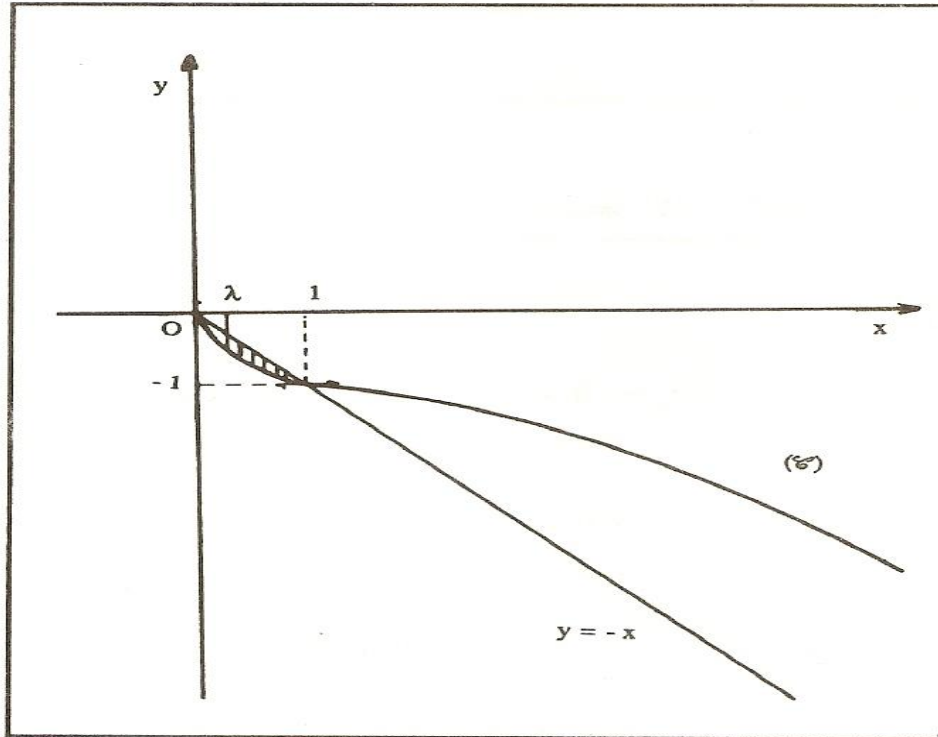
ومنه $f'(x) < 0$ لكل x من $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$

• إذا كان $x = 1$ فإن $g(1) = 0$ ومنه $f'(1) = 0$

تستنتج إذن جدول تغيرات f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	—	—
$f(x)$	0	-1	$-\infty$

(4) لاحظ أن النقطة A (1, -1) نقطة انعطاف للمنحنى.



(5) أ-

نضع : $u = \ln x$ و $v' = \sqrt{x}$
 إذن : $u' = \frac{1}{x}$ و $v = \frac{2}{3} x \sqrt{x}$

$$\begin{aligned}
 J &= \int_{\lambda}^1 \sqrt{x} \ln x \, dx \\
 &= \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x} \ln x \right]_{\lambda}^1 - \frac{2}{3} \int_{\lambda}^1 \sqrt{x} \, dx \\
 &= \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x} \ln x \right]_{\lambda}^1 - \frac{2}{3} \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x} \right]_{\lambda}^1 \\
 &= -\frac{2}{3} \lambda \sqrt{\lambda} \ln \lambda - \frac{4}{9} (1 - \lambda \sqrt{\lambda})
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{3} \lambda \sqrt{\lambda} \ln \lambda + \frac{4}{9} \lambda \sqrt{\lambda} - \frac{4}{9}$$

$$J = -\frac{2}{3} \lambda \sqrt{\lambda} \ln \lambda + \frac{4}{9} \lambda \sqrt{\lambda} - \frac{4}{9} \quad : \text{ومنه}$$

$$A(\lambda) = \int_{\lambda}^1 (-x - f(x)) dx \quad \text{ب-}$$

$$= - \int_{\lambda}^1 \sqrt{x} \ln x dx$$

$$= -\frac{2}{3} \lambda \sqrt{\lambda} \ln \lambda - \frac{4}{9} \lambda \sqrt{\lambda} + \frac{4}{9}$$

• تحديد : $\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} A(\lambda)$

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \lambda \sqrt{\lambda} = 0, \quad \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \lambda \ln \lambda = 0 \quad \text{لدينا}$$

إذن :

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} A(\lambda) = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \left(-\frac{2}{3} \lambda \sqrt{\lambda} \ln \lambda - \frac{4}{9} \lambda \sqrt{\lambda} + \frac{4}{9} \right)$$

$$= \frac{4}{9}$$