

1- * لنبين بالترجع أن : $U_n \geq 0$ لكل n من $\mathbb{N}$.

• لدينا : $U_0 = 0$ و $0 \geq 0$

إذن هذه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

• ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$

نفترض أن $U_n \geq 0$ ولنبين أن : $U_{n+1} \geq 0$

لدينا : $U_n \geq 0$ إذن : $2U_n \geq 0$

ولدينا : $3^n > 0$

إذن : $2U_n + 3^n \geq 0$

أي : $U_{n+1} \geq 0$

خلاصة : لكل n من $\mathbb{N}$, $U_n \geq 0$.

* دراسة رتابة (U_n)

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$

لدينا : $U_{n+1} - U_n = 2U_n + 3^n - U_n$

$$= U_n + 3^n$$

وبما أن : $3^n > 0$ و $U_n \geq 0$ فإن : $U_n + 3^n \geq 0$

وبالتالي فإن : $U_{n+1} - U_n \geq 0$

وهذا يعني أن المتتالية (U_n) تزايدية .

2- a- لنبين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها 2

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$.

لدينا : $V_{n+1} = 3^{n+1} - U_{n+1}$

$$= 3^{n+1} - (2U_n + 3^n) = 3^{n+1} - 3^n - 2U_n$$

$$= 3^n (3 - 1) - 2U_n = 2 \cdot 3^n - 2U_n = 2(3^n - U_n)$$

$$= 2V_n$$

إذن (V_n) بالفعل متتالية هندسية أساسها 2

b- * حساب V_n بدلالة n

بما أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$

$$V_0 = 3^0 - U_0 = 1 - 0 = 1 \quad \text{وحدها الأول}$$

فإنه لكل n من $\mathbb{N}$: $V_n = V_0 q^n$

$$= 1 \cdot 2^n = 2^n$$

* حساب U_n بدلالة n

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$.

لدينا : $V_n = 3^n - U_n$

إذن : $U_n = 3^n - V_n$

$$= 3^n - 2^n$$

c- حساب نهاية (U_n)

لكل n من $\mathbb{N}$, $U_n = 3^n - 2^n$

$$= 3^n \left(1 - \frac{2^n}{3^n} \right) = 3^n \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)$$

وبما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ (لأن $(3) > 1$)

و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$ (لأن $-1 < \frac{2}{3} < 1$)

فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

d- حساب S_n بدلالة n

لتكن (W_n) المتتالية العددية بحيث $W_n = 3^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

$$U_n = W_n - V_n \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{aligned} S_n &= U_0 + U_1 + \dots + U_n \quad \text{وبالتالي فإن :} \\ &= (W_0 - V_0) + (W_1 - V_1) + \dots + (W_n - V_n) \\ &= (W_0 + W_1 + \dots + W_n) - (V_0 + V_1 + \dots + V_n) \end{aligned}$$

وبما أن (V_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول 1 فإن :

$$V_0 + V_1 + \dots + V_n = 1 \cdot \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1$$

ولدينا (W_n) كذلك متتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول

$$W_0 = 3^0 = 1$$

$$\begin{aligned} W_0 + W_1 + \dots + W_n &= 1 \cdot \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} \quad \text{إذن :} \\ &= \frac{3^{n+1} - 1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{3^{n+1} - 1}{2} - (2^{n+1} - 1) \quad \text{وبالتالي فإن :} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3^{n+1} - \frac{1}{2} - 2^{n+1} + 1 = \frac{1}{2} \cdot 3^{n+1} - 2^{n+1} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$