

1- أ- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} x \sqrt{2} = -\sqrt{2}$ و $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \sqrt{1+x} = 0^+$

إذن : $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$

ولدينا لكل x من $] -1, +\infty[$ $f(x) = \frac{x\sqrt{2}}{1+x} \cdot \sqrt{1+x}$

وبما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{2}}{1+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}x}{x} = \sqrt{2}$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x} = +\infty$

فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب- تحديد الفرعين اللانهائيين

• رأينا أن : $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$

إذن المنحنى (C) يقبل مقارباً رأسياً معادلته $x = -1$

• لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}} = 0$

إذن المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ فرعاً شلجماً اتجاهه محور الأفافصيل

2- أ- * حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $] -1, +\infty[$ ولدينا لكل x من $] -1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{1+x} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1+x} \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{2(1+x) - x}{2(1+x)\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{2}(2+2x-x)}{2\sqrt{(1+x)^2}\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{\sqrt{2}(x+2)}{2\sqrt{(1+x)^3}} \end{aligned}$$

* جدول تغيرات الدالة f

نلاحظ أن $f'(x) > 0$ لكل x من $] -1, +\infty[$

ومنه جدول تغيرات الدالة f :

x	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+		
$f(x)$		0	1	$+\infty$

ب- تحديد $f([0, 1])$

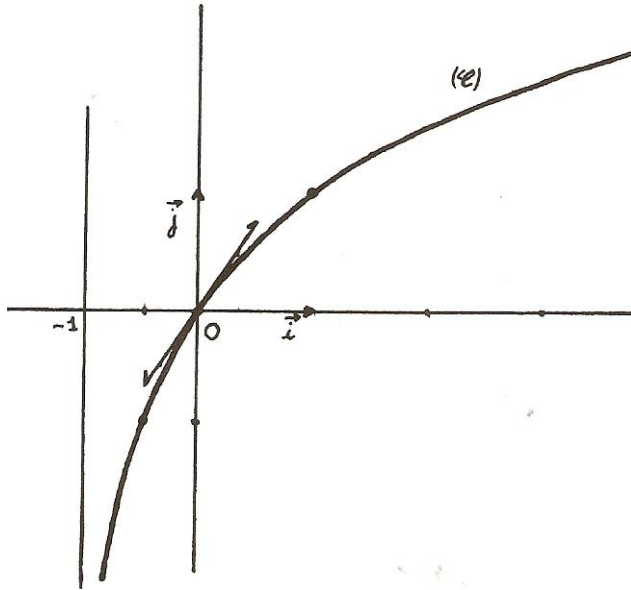
من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن :

$$f([0, 1]) = [0, 1]$$

3- إنشاء المماس و $(\mathcal{C})$

معادلة ديكارتية لمماس $(\mathcal{C})$ في النقطة التي أفصولها 0

هي : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ أي $y = x\sqrt{2}$



4- أ- لنبين بالترجع أن $0 < U_n < 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

• لدينا : $U_0 = \frac{1}{2}$

إذن : $0 < U_0 < 1$

وهذا يعني أن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

• ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$

لنفترض أن $0 < U_n < 1$ ولنبين أن : $0 < U_{n+1} < 1$

لدينا : $0 < U_n < 1$ و f تزايدية قطعاً على $[0, 1]$

إذن : $f(0) < f(U_n) < f(1)$

أي : $0 < U_{n+1} < 1$

خلاصة : لكل n من $\mathbb{N}$ ، $0 < U_n < 1$

ب- لنبين أن : $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$

لدينا :
$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\sqrt{2}U_n}{U_n} = \sqrt{2} > 1$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+U_n}}$$

وبما أن $U_n < 1$ فإن $1 + U_n < 2$

$$\frac{1}{\sqrt{1+U_n}} > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ومن ثم} \quad \sqrt{1+U_n} < \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+U_n}} > 1 \quad \text{ومن ثم:}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1 \quad \text{أي:}$$

ج- الاستنتاج

رأينا أن: $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

وبضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب قطعاً U_n

نحصل على: $U_{n+1} > U_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

وهذا يعني أن المتتالية (U_n) تزايدية

وبما أنها مكبورة بالعدد 1 (لأن $U_n < 1$ لكل n من $\mathbb{N}$) فإنها متقاربة

د- حساب النهاية المتتالية (U_n)

الدالة f متصلة على المجال $[0, 1]$

إذن النهاية ℓ تحقق: $f(\ell) = \ell$

$$\frac{\ell\sqrt{2}}{\sqrt{1+\ell}} = \ell \quad \text{أي:} \quad \ell \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\ell}} - 1 \right) = 0 \quad \text{أي:}$$

$$\sqrt{1+\ell} = \sqrt{2} \quad \text{أو} \quad \ell = 0 \quad \text{أي}$$

$$\ell + 1 = 2 \quad \text{أو} \quad \ell = 0 \quad \text{أي:}$$

$$\ell = 1 \quad \text{أو} \quad \ell = 0 \quad \text{أي}$$

وبما أن (U_n) تزايدية و $0 < U_n < 1$

فإن: $\ell = 1$