

1- لنبين بالترجع أن : $U_n \leq 0$ لكل n من $IN^* - \{1\}$

$$U_2 = \frac{(3 \cdot 1 + 3)U_1 - 8 \cdot 1 - 12}{1} \quad \bullet \text{ لدينا :}$$

$$= (3 + 3) \cdot 3 - 8 - 12 = 18 - 20 = -2$$

$$U_2 \leq 0 \quad \text{إذن :}$$

وهذا يعني أن الخاصية صحيحة من أجل $n = 2$

• ليكن n عنصرا من $IN^* - \{1\}$

لنفترض أن : $U_n \leq 0$ ولنبين أن : $U_{n+1} \leq 0$

$$\text{لدينا : } U_n \leq 0 \quad \text{و} \quad n > 0$$

$$\text{إذن : } (3n + 3)U_n \leq 0 \quad \text{و} \quad -8n - 12 \leq 0$$

$$\frac{(3n+3)U_n - 8n - 12}{n} \leq 0 \quad \text{وبالتالي فإن :}$$

$$U_{n+1} \leq 0 \quad \text{أي :}$$

خلاصة : لكل n من $IN^* - \{1\}$ ، $U_n \leq 0$

2- دراسة رقابة (U_n)

ليكن n عنصرا من $IN^* - \{1\}$

$$\begin{aligned} \text{لدينا :} \\ U_{n+1} - U_n &= \frac{(3n+3)U_n - 8n - 12}{n} - U_n \\ &= \frac{(3n+3)U_n - 8n - 12 - nU_n}{n} = \frac{(3n+3-n)U_n - 8n - 12}{n} \\ &= \frac{(2n+3)U_n - 8n - 12}{n} \end{aligned}$$

وبما أن $n > 0$ و $U_n \leq 0$

$$\text{فإن : } (2n+3)U_n \leq 0 \quad \text{و} \quad -8n - 12 \leq 0$$

$$\frac{(2n+3)U_n - 8n - 12}{n} \leq 0 \quad \text{وبالتالي فإن :}$$

$$U_{n+1} - U_n \leq 0 \quad \text{أي :} \quad U_{n+1} \leq U_n$$

ومن أجل $n = 1$ لدينا كذلك $U_2 \leq U_1$

خلاصة : المتتالية (U_n) تناقصية

3- a- التحقق من أن (V_n) متتالية هندسية

ليكن n عنصرا من IN^*

$$\begin{aligned} \text{لدينا :} \\ V_{n+1} &= \frac{4 - U_{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{4 - \frac{(3n+3)U_n - 8n - 12}{n}}{n+1} = \frac{4n - (3n+3)U_n + 8n + 12}{n(n+1)} \\ &= \frac{12n + 12 - (3n+3)U_n}{n(n+1)} = \frac{12(n+1) - 3(n+1)U_n}{n(n+1)} \\ &= \frac{3(n+1)(4 - U_n)}{n(n+1)} = 3 \cdot \frac{4 - U_n}{n} = 3 \cdot V_n \end{aligned}$$

إذن (V_n) بالفعل متتالية هندسية أساسها $q = 3$

b- * حساب V_n بدلالة n

بما أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول :

$$V_1 = \frac{4 - U_1}{1} = 4 - 3 = 1$$

فإنه لكل n من IN^* :

$$V_n = V_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$$

* حساب U_n بدلالة n

ليكن n عنصرا من IN^* .

$$\text{لدينا :} \quad V_n = \frac{4 - U_n}{n}$$

إذن : $4 - U_n = n V_n$

ومنه : $U_n = 4 - n V_n$

$$= 4 - n \cdot 3^{n-1}$$

c- حساب نهاية (U_n)

رأينا أن : $U_n = 4 - n \cdot 3^{n-1}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

وبما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n = -\infty$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{n+1} = +\infty$ (لأن $3 > 1$)

فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$