

(1) بما أن الدالة $x \rightarrow x^3 (-1 + 3 \ln x)$ معرفة على $\mathbb{R}_+^*$ و $f(0) = 0$

فإن $D = \mathbb{R}_+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 (-1 + 3 \ln x) = +\infty \quad (2)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^3 (-1 + 3 \ln x) \quad (a) \quad (3)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (-x^3 + 3x^3 \ln x)$$

$$= 0 = f(0) \quad \left(\begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^3 \ln x = 0 \text{ لأن} \end{array} \right)$$

إذن f متصلة على اليمين في النقطة 0 .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^3 (-1 + 3 \ln x)}{x} \quad (b)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 (-1 + 3 \ln x)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (-x^2 + 3x^2 \ln x)$$

$$= 0 \quad \left(\begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 3x^2 \ln x = 0 \text{ لأن} \end{array} \right)$$

وهذا يعني أن f قابلة للإشتقاق على اليمين في النقطة 0 و $f'_d(0) = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \quad (a) \quad (4)$$

$$f'(x) = 3x^2 (-1 + 3 \ln x) + x^3 \cdot \left(\frac{3}{x} \right)$$

$$= -3x^2 + 9x^2 \ln x + 3x^2$$

$$= 9x^2 \ln x$$

(b) إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\ln x$ ، لأن $x^2 > 0$ لكل x من $\mathbb{R}_+^*$
 ومنه $f'(x) \geq 0$ إذا كان $x \geq 1$ و $f'(x) \leq 0$ إذا كان $0 < x \leq 1$
 (c) جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	0	-	0	+
$f(x)$	0		-1	$+\infty$

(5) (a) أفاصيل نقط تقاطع (C) ومحور الأفاصيل هي حلول المعادلة $f(x) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* :$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow x^3(-1 + 3 \ln(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow -1 + 3 \ln(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{3}}$$

وبما أن $f(0) = 0$ فإن (C) يقطع محور الأفاصيل في نقطتين هما :

$$A\left(\frac{1}{e^3}, 0\right) \text{ و } O(0, 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(-1 + 3 \ln(x)) \quad (b)$$

$$= +\infty$$

وهذا يعني أن (C) يقبل اتجاهها مقارباً هو اتجاه محور الأرتيمب

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f''(x) = 18x \ln(x) + 9x \quad (c)$$

$$= 9x(1 + 2 \ln x)$$

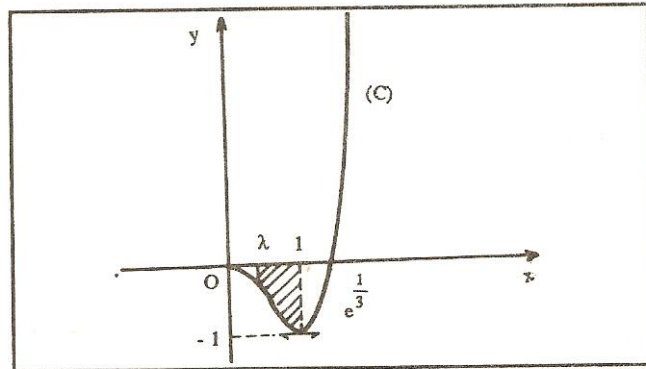
بما أن $x \in \mathbb{R}_+^*$ فإن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $1 + 2 \ln x$

حسب الجدول التالي :

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

$f''(x)$ تنعدم في النقطة $e^{-\frac{1}{2}}$ مع تغيير الإشارة وهذا يعني أن المنحنى (C)

يقبل نقطة انعطاف هي $I\left(e^{-\frac{1}{2}}, -\frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$ لأن $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}}$ (6)



$$A(\lambda) = - \int_{\lambda}^1 f(x) dx \quad (a) \quad (7)$$

$$= \int_{\lambda}^1 x^3 (1 - 3 \ln x) dx$$

$$= \int_{\lambda}^1 x^3 dx - 3 \int_{\lambda}^1 x^3 \ln x dx$$

$$= \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_{\lambda}^1 - 3 \left[\frac{1}{4} x^4 \ln x \right]_{\lambda}^1 + \frac{3}{4} \int_{\lambda}^1 x^3 dx$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \lambda^4 + \frac{3}{4} \lambda^4 \ln(\lambda) + \frac{3}{16} [x^4]_{\lambda}^1$$

$$= \frac{7}{16} - \frac{7}{16} \lambda^4 + \frac{3}{4} \lambda^4 \ln \lambda$$

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} A(\lambda) = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \left(\frac{7}{16} - \frac{7}{16} \lambda^4 + \frac{3}{4} \lambda^4 \ln \lambda \right) \quad (b)$$

$$= \frac{7}{16}$$

$$\left(\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \frac{3}{4} \lambda^4 \ln \lambda = 0, \quad \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \frac{7}{16} \lambda^4 = 0 \quad \text{d'où} \right)$$