

(I) لكل x من $\mathbb{R}_+$: $e^x \geq 1$ و $x + 1 \geq 1$

إذن $(x + 1) e^x \geq 1$ أي $x + 1 \geq \frac{1}{e^x}$

أي $\frac{1}{x+1} \leq e^x$ وبالتالي $\frac{1}{x+1} - e^x \leq 0$

(2) لكل x من $] - 1, 0]$: $0 < e^x \leq 1$ و $0 < x + 1 \leq 1$

إذن $(x + 1) e^x \leq 1$ أي $x + 1 \leq \frac{1}{e^x}$

أي $\frac{1}{x+1} \geq e^x$ وبالتالي $\frac{1}{x+1} - e^x \geq 0$

(II) لدينا : $x \in D_f \Leftrightarrow 1 + x > 0$

$$\Leftrightarrow x > -1$$

إذن : $D_f =] - 1, +\infty [$

(2) لكل x من $\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = \ln(1+x) - e^x$$

$$= \ln x \left(1 + \frac{1}{x}\right) - e^x$$

$$= \ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - e^x$$

$$= \ln x - e^x + \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : f(x) = \ln x - e^x + \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

(3) لدينا . $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} e^x = e^{-1}$ و $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \ln(1+x) = -\infty$

إذن : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (\ln(1+x) - e^x)$
 $= -\infty$

ومنه $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$

www.achamel.info

www.Achamel.net

www.Achamel.org

www.Achamel.ma

لدينا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln x - e^x + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] \quad \text{إذن :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{e^x}{x} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ومنه :}$$

(4) . حساب $f'(x)$ مع تحديد إشارتها :

لكل x من $] -1, +\infty [$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - e^x$$

حسب السؤال (I) : $f'(x) > 0$ إذا كان $x \in] -1, 0 [$

و $f'(x) < 0$ إذا كان $x \in] 0, +\infty [$ و $f'(x) = 0$ إذا كان $x = 0$

جدول تغيرات الدالة f :

x	- 1	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	- 1	$-\infty$

(5) دراسة الفروع اللانهائية :

بما أن $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ فإن المستقيم ذي المعادلة $x = -1$ مقارب

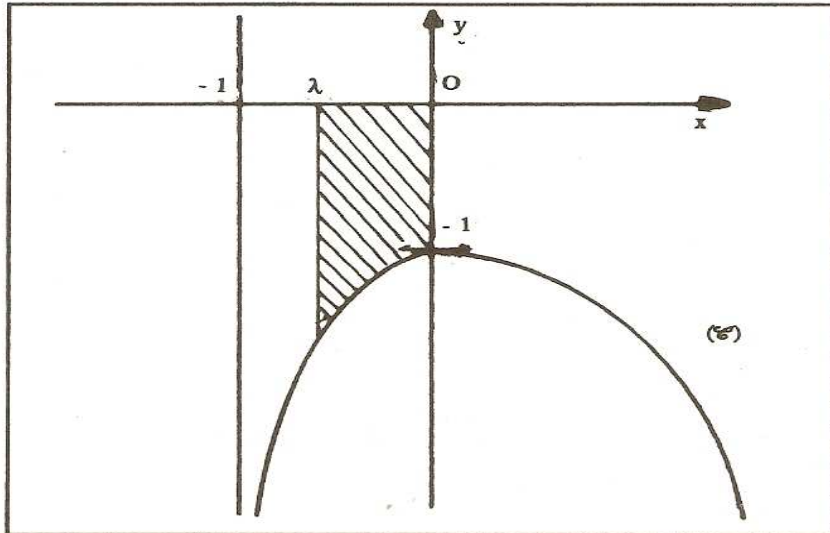
للمنحنى (C).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\text{لدينا} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{x} = 1 \quad \text{و} \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{e^x}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} \cdot \frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{e^x}{x} \right) \\ &= -\infty\end{aligned}$$

ومنه المنحنى (C) يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأرتياب جوار $+\infty$.
إنشاء المنحنى (C):



(6) أ- نحسب أولاً : $\int_{\lambda}^0 \ln(1+x) dx$

نضع : $u = \ln(1+x)$ ، $u' = \frac{1}{1+x}$

$v = x$ ، $v' = 1$

إذن : $\int_{\lambda}^0 \ln(1+x) dx = [x \ln(1+x)]_{\lambda}^0 - \int_{\lambda}^0 \frac{x}{1+x} dx$

$= -\lambda \ln(1+\lambda) - \int_{\lambda}^0 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx$

$= -\lambda \ln(1+\lambda) - [x - \ln(1+x)]_{\lambda}^0$

$$= -\lambda \ln(1 + \lambda) + (\lambda - \ln(1 + \lambda))$$

$$= \lambda - (1 + \lambda) \ln(1 + \lambda)$$

ثم نحسب $\int_{\lambda}^0 e^x dx$:

$$\int_{\lambda}^0 e^x dx = [e^x]_{\lambda}^0 = 1 - e^{\lambda}$$

ومنه : $A(\lambda) = \left(- \int_{\lambda}^0 f(x) dx \right) \cdot 4 \text{ cm}^2$

$$= - \left(\int_{\lambda}^0 \ln(1+x) dx - \int_{\lambda}^0 e^x dx \right) \cdot 4 \text{ cm}^2$$

$$= - \left(\lambda - (1 + \lambda) \ln(1 + \lambda) - 1 + e^{\lambda} \right) \cdot 4 \text{ cm}^2$$

$$= (-\lambda + 1 + (\lambda + 1) \ln(1 + \lambda) - e^{\lambda}) \cdot 4 \text{ cm}^2$$

وبالتالي : $A(\lambda) = (-\lambda + 1 + (\lambda + 1) \ln(1 + \lambda) - e^{\lambda}) \cdot 4 \text{ cm}^2$

ب- بما أن $\lim_{\lambda \rightarrow -1} (\lambda + 1) \ln(1 + \lambda) = 0$ و $\lim_{\lambda \rightarrow -1} e^{\lambda} = e^{-1}$

$$\lambda > -1$$

$$\lambda > -1$$

و $\lim_{\lambda \rightarrow -1} (-\lambda + 1) = 2$

$$\lambda > -1$$

فإن : $\lim_{\lambda \rightarrow -1} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow -1} (-\lambda + 1 + (\lambda + 1) \ln(1 + \lambda) - e^{\lambda}) \cdot 4$

$$\lambda > -1$$

$$\lambda > -1$$

$$= (2 - e^{-1}) \cdot 4$$

ومنه $\lim_{\lambda \rightarrow -1} A(\lambda) = (2 - e^{-1}) \cdot 4$

$$\lambda \rightarrow -1$$

$$\lambda > -1$$



Achamel