

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \neq 0\} \quad - \text{أ} \quad (1) \\ =] - \infty, 1[\cup] 1, + \infty [$$

ب- . نضع $t = x - 1$ إذا كان $x \rightarrow +\infty$ فإن $t \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(x-1) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t+1} \ln t \quad : \text{إذن} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{t+1} \cdot \frac{\ln t}{t} \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{t+1} = 1 \quad \text{وبما أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(x-1) = 0 \quad \text{فإن} :$$

. نضع : $t = 1 - x$ إذا كان $x \rightarrow -\infty$ فإن $t \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \ln(1-x) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-t} \ln t \quad : \text{إذن} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{1-t} \cdot \frac{\ln t}{t} \end{aligned}$$

$$= -1 \cdot 0 \quad \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{1-t} = -1 \quad \text{و} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \quad \text{لأن} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \ln(1-x) = 0 \quad \text{ومنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln(x-1)) = +\infty \quad \text{ج-}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x + \ln(x-1)) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x + \ln(1-x)) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \ln(1-x))$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{1}{x} \ln(1-x) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \ln(1-x) = 0$$

د- لكل x من $\mathbb{R} - \{1\}$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{x}{x-1}$$

- إشارة $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0, 1[$$

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$

(2) أ - بما أن $f(0) = 0$ فإن 0 حل للمعادلة $f(x) = 0$.

الدالة f متصلة وتزايدية قطعاً على $]1, \frac{3}{2}[$ فهي تقابل من $]1, \frac{3}{2}[$ نحو $]-\infty, \frac{3}{2} - \ln 2[$

وبما أن $0 \in]-\infty, \frac{3}{2} - \ln 2[$ فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من

$$]1, \frac{3}{2}[\text{ بحيث } f(\alpha) = 0$$

وبالتالي المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين هما 0 و α بحيث $1 < \alpha < \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \text{ب- . لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \ln(x-1)\right) \\ &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-1) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

إذن اتجاه المستقيم الذي معادلته $y = x$ اتجاه مقارب للمنحنى (C) جوار $+\infty$

$$\begin{aligned} \text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \ln(1-x)\right) \\ &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1-x) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

إذن اتجاه المستقيم الذي معادلته $y = x$ اتجاه مقارب للمنحنى (C) جوار $-\infty$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ فإن المستقيم الذي معادلته $x = 1$ مقارب

للمنحنى (C)

ج- $\forall x \in]1, +\infty[: f(x) - x = \ln(x - 1)$

- إذا كان $x > 2$ فإن (C) فوق المستقيم ذي المعادلة $y = x$

- إذا كان $1 < x < 2$ فإن (C) تحت المستقيم ذي المعادلة $y = x$

- إذا كان $x = 2$ فإن (C) يقطع المستقيم ذي المعادلة $y = x$ في النقطة

$A(2, 2)$

$\forall x \in]-\infty, 1[: f(x) - x = \ln(1 - x)$

- إذا كان $x < 0$ فإن (C) فوق المستقيم ذي المعادلة $y = x$

- إذا كان $0 < x < 1$ فإن (C) تحت المستقيم ذي المعادلة $y = x$

- إذا كان $x = 0$ فإن (C) يقطع المستقيم ذي المعادلة $y = x$ في النقطة

$O(0, 0)$

خلاصة : - إذا كان $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ فإن (C) فوق

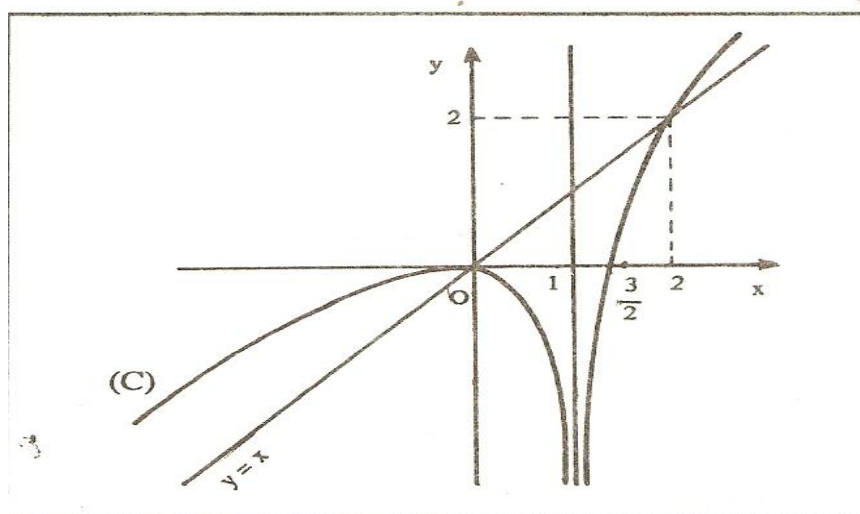
المستقيم ذي المعادلة $y = x$

- إذا كان $x \in]0, 1[\cup]1, 2[$ فإن (C) تحت المستقيم ذي

المعادلة $y = x$

- إذا كان $x = 0$ أو $x = 2$ فإن (C) يقطع المستقيم ذي المعادلة

$y = x$ في النقطتين $O(0, 0)$ و $A(2, 2)$



(3) أ- دالة أصلية للدالة u على $]0, 1[$ هي : $F(t) = \int_1^t u(x) dx$ حيث $t \in]0, 1[$. نحسب $F(t)$

نضع $\alpha'(x) = \frac{1}{x}$, $\alpha(x) = \ln x$

$\beta(x) = x - \frac{x^2}{2}$, $\beta'(x) = 1 - x$

إذن :

$$F(t) = \int_1^t u(x) dx = \left[\left(x - \frac{x^2}{2} \right) \ln x \right]_1^t - \int_1^t \left(1 - \frac{x}{2} \right) dx$$

$$= \left(t - \frac{t^2}{2} \right) \ln t - \left[x - \frac{x^2}{4} \right]_1^t$$

$$= \left(t - \frac{t^2}{2} \right) \ln t - t + \frac{t^2}{4} + \frac{3}{4}$$

$$F(t) = \left(t - \frac{t^2}{2} \right) \ln t - t + \frac{t^2}{4} + \frac{3}{4} \quad \text{ومنه}$$

$$G(t) = \int_1^t v(x) dx : \text{ دالة أصلية للدالة } v \text{ على }]0, 1[\text{ هي :}$$

حيث $t \in]0, 1[$. نحسب $G(t)$.

$$\alpha'(x) = \frac{2}{x} \ln x, \quad \alpha(x) = (\ln x)^2 \quad \text{نضع}$$

$$\beta(x) = x, \quad \beta'(x) = 1$$

$$G(t) = \int_1^t v(x) dx = [x (\ln x)^2]_1^t - 2 \int_1^t \ln x dx$$

$$= t (\ln t)^2 - 2 \int_1^t \ln x dx \quad (1)$$

$$\int_1^t \ln x dx \quad \text{نحسب}$$

$$\alpha'(x) = \frac{1}{x}, \quad \alpha(x) = \ln x \quad \text{نضع}$$

$$\beta(x) = x, \quad \beta'(x) = 1$$

$$\int_1^t \ln x dx = [x \ln x]_1^t - \int_1^t dx \quad \text{إذن}$$

$$= t \ln t - t + 1$$

$$= t \ln t - t + 1 \quad (2)$$

$$G(t) = t (\ln t)^2 - 2 t \ln t + 2 t - 2 \quad \text{من (1) و (2) نستنتج :}$$

$$V(\lambda) = \int_0^\lambda \pi f^2(x) dx \quad \text{ب-}$$

$$= \pi \int_0^\lambda (x + \ln(1-x))^2 dx$$

$$= \pi \int_0^\lambda (x^2 + 2x \ln(1-x) + (\ln(1-x))^2) dx$$

$$= \pi \left[\int_0^\lambda x^2 dx + 2 \int_0^\lambda x \ln(1-x) dx + \int_0^\lambda (\ln(1-x))^2 dx \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \left(\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^\lambda + 2 \int_{1-\lambda}^1 (1-t) \ln t \, dt + \int_{1-\lambda}^1 (\ln t)^2 \, dt \right) \\
V(\lambda) &= \pi \left(\frac{\lambda^3}{3} + 2 [F(t)]_{1-\lambda}^1 + [G(t)]_{1-\lambda}^1 \right) \\
&= \pi \left(\frac{\lambda^3}{3} + 2 (F(1) - F(1-\lambda)) + (G(1) - G(1-\lambda)) \right) \\
&= \pi \left(\frac{\lambda^3}{3} - (1-\lambda)^2 \ln(1-\lambda) + (1-\lambda) \left(\frac{3+\lambda}{2} \right) - \frac{3}{2} \right. \\
&\quad \left. - (1-\lambda) (\ln(1-\lambda))^2 + 2(1-\lambda) \ln(1-\lambda) - 2(1-\lambda) + 2 \right) \\
&= \pi \left(\frac{\lambda^3}{3} - (1-\lambda) (\ln(1-\lambda))^2 + (1-\lambda)^2 \ln(1-\lambda) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(1-\lambda)^2}{2} + \frac{1}{2} \right) \\
\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda < 1}} (1-\lambda)^2 \ln(1-\lambda) &= 0 \quad , \quad \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda < 1}} (1-\lambda) (\ln(1-\lambda))^2 = 0 \quad \text{بما أن} \\
\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda < 1}} \frac{(1-\lambda)^2}{2} &= 0 \quad \text{و} \\
\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda < 1}} V(\lambda) &= \frac{5}{6} \pi \quad \text{فإن}
\end{aligned}$$