

$$1- \text{أ- لنبين أن : } 2 - U_{n+1} = \frac{3 U_n}{1 + 3 U_n} (2 - U_n) \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{لدينا : } 2 - U_{n+1} &= 2 - \frac{2 + 3 U_n^2}{1 + 3 U_n} \\ &= \frac{2 + 6 U_n - 2 - 3 U_n^2}{1 + 3 U_n} = \frac{3 U_n (2 - U_n)}{1 + 3 U_n} \end{aligned}$$

ب- لنبين بالترجع أن : $0 < U_n < 2$ لكل n من $\mathbb{N}$

$$U_0 = 1 \quad \text{• لدينا :}$$

$$0 < U_0 < 2 \quad \text{إذن :}$$

وهذا يعني أن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

• ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$ ،

لنفترض أن : $0 < U_n < 2$ ولنبين أن : $0 < U_{n+1} < 2$

حسب نتيجة السؤال السابق لدينا :

$$U_{n+1} - 2 = \frac{3 U_n}{1 + 3 U_n} (U_n - 2)$$

وبما أن : $0 < U_n < 2$
 فإن : $(1) \quad 0 < \frac{3 U_n}{1+3 U_n} < 1$

و $-2 < U_n - 2 < 0$

أي : $(2) \quad 0 < -(U_n - 2) < 2$

وبضرب المتفاوتتين المزدوجتين (1) و (2) طرفا طرفا نحصل على:

$$0 < \frac{-3 U_n (U_n - 2)}{1+3 U_n} < 2$$

ومنه فإن : $-2 < \frac{3 U_n (U_n - 2)}{1+3 U_n} < 0$

أي : $-2 < U_{n+1} - 2 < 0$

أي : $0 < U_{n+1} < 2$

خلاصة : لكل n من $\mathbb{N}$ ، $0 < U_n < 2$ ،

جـ * لنبين أن (U_n) تزايدية

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$

لدينا : $U_{n+1} - U_n = \frac{2+3 U_n^2}{1+3 U_n} - U_n$

$$= \frac{2+3 U_n^2 - U_n - 3 U_n^2}{1+3 U_n} = \frac{2 - U_n}{1+3 U_n}$$

وبما أن : $0 < U_n < 2$

فإن : $2 - U_n > 0$ و $1+3 U_n > 0$

وبالتالي فإن : $\frac{2 - U_n}{1+3 U_n} > 0$ أي : $U_{n+1} - U_n > 0$

وهذا يعني أن (U_n) بالفعل تزايدية

* الاستنتاج

بما أن المتتالية (U_n) تزايدية ومكبورة بالعدد 2 (لأن $0 < U_n < 2$) فإنها متقاربة

2- أ- لنبين أن : $\frac{3 U_n}{1+3 U_n} < \frac{6}{7}$ لكل n من $\mathbb{N}$

لدينا : $\frac{3 U_n}{1+3 U_n} = 1 - \frac{1}{1+3 U_n}$

وبما أن : $U_n < 2$ فإن : $1+3 U_n < 7$

وبالتالي فإن : $\frac{1}{1+3 U_n} > \frac{1}{7}$

ومنه فإن : $\frac{-1}{1+3 U_n} < -\frac{1}{7}$

أي : $1 - \frac{1}{1+3 U_n} < \frac{6}{7}$

أي : $\frac{3 U_n}{1+3 U_n} < \frac{6}{7}$

ب- استنتاج أن : $2 - U_n \leq \left(\frac{6}{7}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

• لدينا : $2 - U_0 = 2 - 1$

$$= 1$$

$$\left(\frac{6}{7}\right)^0 = 1 \quad \text{و}$$

$$2 - U_0 \leq \left(\frac{6}{7}\right)^0 \quad \text{إذن :}$$

وهذا يعني أن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

• ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$

لنفترض أن $2 - U_n \leq \left(\frac{6}{7}\right)^n$ ولنبين أن : $2 - U_{n+1} \leq \left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$

حسب نتيجة السؤال 1- أ- لدينا : $2 - U_{n+1} = \frac{3U_n}{1+3U_n} (2 - U_n)$

وبما أن : $\frac{3U_n}{1+3U_n} < \frac{6}{7}$ (حسب نتيجة السؤال 2- أ-)

$$2 - U_n \leq \left(\frac{6}{7}\right)^n \quad \text{و}$$

فإن : $\frac{3U_n}{1+3U_n} \cdot (2 - U_n) \leq \frac{6}{7} \left(\frac{6}{7}\right)^n$ (كل الأطراف موجبة)

$$2 - U_{n+1} \leq \left(\frac{6}{7}\right)^{n+1} \quad \text{أي :}$$

خلاصة : لكل n من $\mathbb{N}$ $2 - U_n \leq \left(\frac{6}{7}\right)^n$

ج- حساب نهاية (U_n)

لدينا : $0 < 2 - U_n \leq \left(\frac{6}{7}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

وبما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^n = 0$ (لأن $-1 < \frac{6}{7} < 1$)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 \quad \text{و}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - U_n) = 0 \quad \text{فإن :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2 \quad \text{وبالتالي فإن :}$$