

(1) ليكن a و b عددين حقيقيين.

$$a + \frac{b}{1+x^2} = \frac{ax^2 + a + b}{1+x^2} \quad \text{لكل } x \text{ من } \mathbb{R} \text{ لدينا :}$$

$$x \longrightarrow \frac{x^2}{1+x^2} \quad \text{و} \quad x \longrightarrow \frac{ax^2 + a + b}{1+x^2} \quad \text{إذن الدالتان}$$

متساويتان إذا كان : $a = 1$ و $a + b = 0$

أي إذا كان $a = 1$ و $b = -1$.

وبالتالي العددين الحقيقيين اللذان من أجلهما :

$$\frac{x^2}{1+x^2} = a + \frac{b}{1+x^2} \quad \text{لكل } x \text{ من } \mathbb{R} \text{ هما : } a = 1 \text{ و } b = -1.$$

ملاحظة : يمكن استعمال طريقة ثانية لتحديد العددين الحقيقيين a و b .
إذا انجزنا القسمة الإقليدية للحدودية x^2 على الحدودية $x^2 + 1$ نحصل
على :

$$\begin{array}{r} x^2 \quad | \quad x^2 + 1 \\ - \quad x^2 + 1 \\ \hline -1 \end{array}$$

$$x^2 = 1(x^2 + 1) - 1 \quad \text{إذن :}$$

$$\frac{x^2}{1+x^2} = 1 + \frac{-1}{1+x^2} \quad \text{وبالتالي :}$$

$$\text{ومنه : } a = 1 \text{ و } b = -1$$

$$(2) \text{ حساب التكامل : } I = \int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{1+t} dt$$

نضع $t = x^2$ حيث $x \geq 0$ إذن $dt = 2x dx$
 إذا كان $t = 1$ فإن $x = 1$ وإذا كان $t = 3$ فإن $x = \sqrt{3}$
 وبالتالي :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{1+t} dt = 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= 2 \int_1^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= 2 [x - \text{Arctan } x]_1^{\sqrt{3}} \\ &= 2 [(\sqrt{3} - \text{Arctan } \sqrt{3}) - (1 - \text{Arctan } 1)] \\ &= 2 \left(\sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12} \right) \\ &= 2\sqrt{3} - 2 - \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

(3) حساب التكامل : $J = \int_0^1 \frac{1}{2} \ln(1+x^2) dx$

نضع : $\begin{cases} f'(x) = \frac{x}{1+x^2} \\ g(x) = x \end{cases}$ إذن $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \\ g'(x) = 1 \end{cases}$

ومنه : $J = \int_0^1 \frac{1}{2} \ln(1+x^2) dx = \int_0^1 f(x) g'(x) dx$

$$= [f(x) g(x)]_0^1 - \int_0^1 f'(x) g(x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x \ln(1+x^2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 - [x - \text{Arctan } x]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 - \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{2} \ln 2$$

Achamel

مع تحيات Equipe Achamel