

1) أ- الدالة $x \rightarrow \frac{1 - \ln x}{1 - \ln x}$ معرفة على $]0, e[\cup]e, +\infty[$

والدالة $x \rightarrow (x - 1)e^{-x}$ معرفة على $] -\infty, 0]$

إذن : $D_f = (] -\infty, 0]) \cup (]0, e[\cup]e, +\infty[)$

$=] -\infty, e[\cup]e, +\infty[$

ب- لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$

إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1)e^{-x} = -\infty$

ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

بما أن $\lim_{x \rightarrow e^-} (1 + \ln x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow e^-} (1 - \ln x) = 0^+$

فإن $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x} = +\infty$

بما أن $\lim_{x \rightarrow e^+} (1 + \ln x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow e^+} (1 - \ln x) = 0^-$

فإن $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x} = -\infty$

نضع $X = \ln x$ ، إذا كان $x \rightarrow +\infty$ فإن $X \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1 + X}{1 - X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{-X} = -1 \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1 \quad \text{ومنه}$$

(2) أ- . نضع $X = \ln x$ ، إذا كان $x \rightarrow 0^+$ فإن $X \rightarrow -\infty$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{1 + X}{1 - X} \quad \text{إذن :}$$

$$= \lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{-X}{X} = -1$$

بما أن : $f(0) = (0 - 1)e^{-0} = -1$ فإن f متصلة على اليمين في النقطة 0.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (x - 1)e^{-x} \quad \text{لدينا :}$$

$$= -1 = f(0)$$

إذن f متصلة على اليسار في النقطة 0.

وبالتالي f متصلة في النقطة 0.

ب- . بما أن $x - x \ln x > 0$ بجوار 0 على اليمين فإن

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x - x \ln x) = 0^+ \quad \text{ومنه :}$$

تمتع بالقراءة مع الشامل . تابع في الصفحة
الموالية

مع تحيات Equipe Achamel

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2}{x - x \ln x} = +\infty$$

إذن f غير قابلة للإشتقاق على اليمين في النقطة 0.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{(x-1)e^{-x} + 1}{x} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(e^{-x} - \frac{e^{-x} - 1}{x} \right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = -1 \quad \text{لأن}$$

إذن f قابلة للإشتقاق على اليسار في النقطة 0.

أخيرا : f غير قابلة للإشتقاق في النقطة 0.

(3) - أ . لكل x من $]-\infty, 0[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} - (x-1)e^{-x} \\ &= (2-x)e^{-x} \end{aligned}$$

لدينا : $\forall x \in]-\infty, 0[; (2-x) > 0$

إذن : $\forall x \in]-\infty, 0[; f'(x) > 0$

لـ لكل x من $]0, e[\cup]e, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}(1 - \ln x) + \frac{1}{x}(1 + \ln x)}{(1 - \ln x)^2} \\ &= \frac{2}{x(1 - \ln x)^2} \end{aligned}$$

لاحظ أن : $\forall x \in]0, e[\cup]e, +\infty[: f'(x) > 0$

ب- جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	
$f(x)$	$-\infty$	-1	$+\infty$	-1

(4) - أ . لكل x من $]0, e[\cup]e, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2 \frac{(1 - \ln x)^2 + x \left[-\frac{2}{x}(1 - \ln x) \right]}{x^2 (1 - \ln x)^4} \\ &= -2 \frac{(1 - \ln x)^2 - 2(1 - \ln x)}{x^2 (1 - \ln x)^4} \\ &= \frac{2(1 + \ln x)}{x^2 (1 - \ln x)^3} \\ f''(x) &= \frac{2(1 + \ln x)}{x^2 (1 - \ln x)^3} \end{aligned}$$

إذن :

تمتع بالقراءة مع الشامل . واصل المتابعة في
الصفحة الموالية

مع تحيات Equipe Achamel

لكل $x > 0$ و $x \neq e$: $x = \frac{1}{e} \Leftrightarrow f''(x) = 0$
 وبما أن $f''(x)$ تنعدم في $\frac{1}{e}$ بتغيير إشارتها فإن : $I\left(\frac{1}{e}, f\left(\frac{1}{e}\right)\right)$

نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$. إذن $f\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ إذن $I\left(\frac{1}{e}, 0\right)$

. لكل x من $] -\infty, 0[$: $f''(x) = (x - 3)e^{-x}$
 بما أن $f''(x)$ لا تنعدم في المجال $] -\infty, 0[$ فإن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ لا يقبل
 نقطة انعطاف على $] -\infty, 0[$.

وبالتالي $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف وحيدة وهي : $I\left(\frac{1}{e}, 0\right)$

ب- لدينا $f\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ و $f'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{e}{2}$

إذن معادلة ديكارتية لمماس المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة I هي :

$$y = f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x - \frac{1}{e}\right) + f\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$\text{أي } y = \frac{e}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$(5) \text{ أ- لدينا : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x} e^{-x} = +\infty$$

إذن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأرتايب جوار $-\infty$

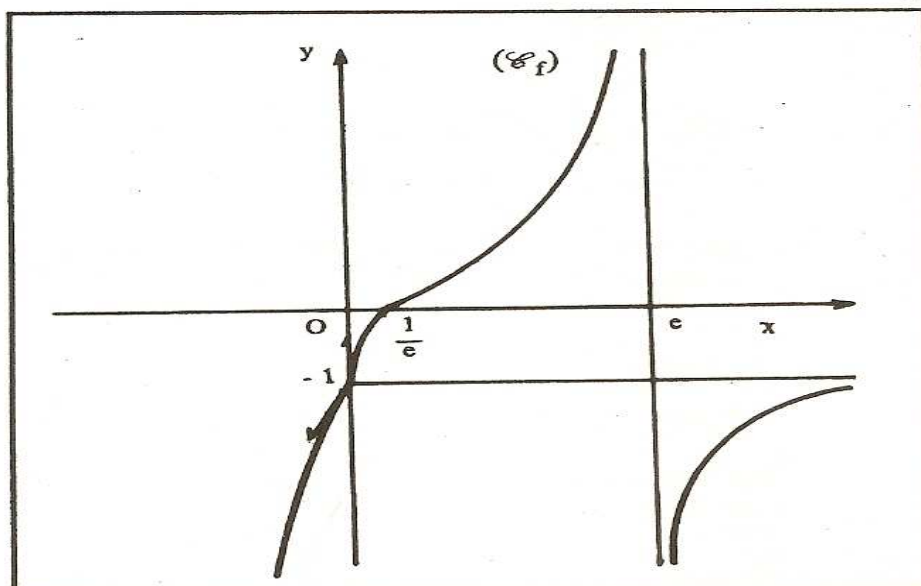
. بما أن $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = -\infty$ فإن المستقيم ذي المعادلة

$x = e$ مقارب للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ فإن المستقيم ذي المعادلة $y = -1$ مقارب

للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

ب-



$$\int_{-1}^0 x e^{-x} dx \quad \text{نحسب (6)}$$

$$u' = 1 \quad , \quad u = x \quad \text{نضع}$$

$$v = -e^{-x} \quad v' = e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 x e^{-x} dx &= [-x e^{-x}]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 e^{-x} dx \quad \text{إذن :} \\ &= [-x e^{-x}]_{-1}^0 + [-e^{-x}]_{-1}^0 = -1 \end{aligned}$$

ومنه مساحة الخيز المطلوب هي :

$$\begin{aligned} A &= - \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (1-x) e^{-x} dx \\ &= \int_{-1}^0 e^{-x} dx - \int_{-1}^0 x e^{-x} dx \\ &= [-e^{-x}]_{-1}^0 - (-1) \\ &= e \end{aligned}$$



واصل المراجعة مع باقي التمارين
Equipe Achamel