

1- لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2\sqrt{x-1}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{2\sqrt{x-1}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - 2 \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} \right) = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2\sqrt{1-x}$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{2\sqrt{1-x}}{-x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} \right) = -\infty$$

2- أ- الدالة f متصلة في 1 لأن :

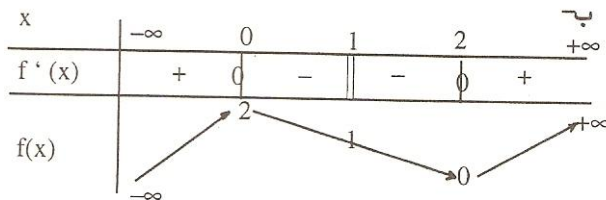
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

ب- الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليمين و على اليسار في 1

لأن : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty$

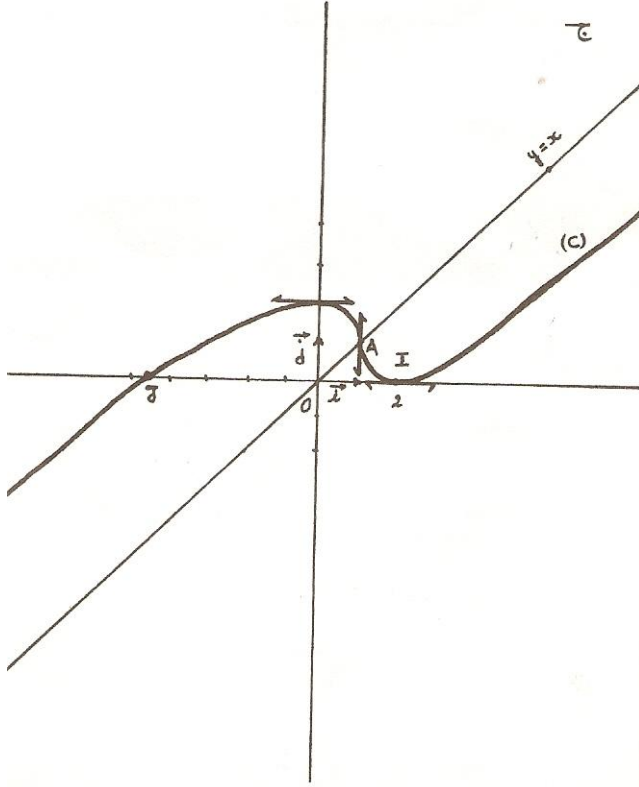
وهذا يعني هندسيا أن المنحنى (C) يقبل في النقطة $A(1, 1)$ مماسا رأسيا

3- أ-
$$\begin{cases} f'(x) = \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}} & ; x > 1 \\ f'(x) = \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}} & ; x < 1 \end{cases}$$



4- المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ وبجوار $-\infty$ فرعين شلجيمين
اتجاههما المستقيم ذو المعادلة $y = x$

ب- محور الأفاصيل يقطع المنحنى (C) في النقطتين I (2, 0)
و J $(-2 - 2\sqrt{2}, 0)$



5- أ- ليكن x عنصرا من المجال $[2, +\infty[$

لدينا : $f(x) = x - 2\sqrt{x-1}$

$$= x - 2(x-1)^{\frac{1}{2}} = x - 2(x-1)'(x-1)^{\frac{1}{2}-1}$$

إذن : $g(x) = \frac{x^2}{2} - 2 \cdot \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}-1}}{\frac{1}{2}-1} + c$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3} \sqrt{(x-1)^3} + c$$

حيث c ثابتة حقيقية

وبما أن $g(2) = \frac{2}{3}$ فإن : $\frac{4}{2} - \frac{4}{3} + c = \frac{2}{3}$

وبالتالي فإن : $c = 0$

ومنه فإن : $g(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}(x-1)\sqrt{x-1}$ لكل x من

$[2, +\infty[$

ب- لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4}{3} \sqrt{(x-1)^3} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{4\sqrt{(x-1)^3}}{3x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{4\sqrt{(x-1)^3}}{3\sqrt{x^4}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sqrt{\frac{(x-1)^3}{x^4}} \right) = +\infty$$

• الدالة g قابلة للاشتقاق على $[2, +\infty[$ ولدينا لكل x من

$[2, +\infty[$, $g'(x) = f(x)$ (لأن g دالة أصلية للدالة f)

إذن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $f(x)$ على $[2, +\infty[$

وحسب جدول تغيرات الدالة f أو التمثيل المبياني للدالة f

نلاحظ أن $f(x) > 0$ لكل x من $[2, +\infty[$

وبالتالي فإن الدالة g تزايدية على $[2, +\infty[$

ومنه جدول تغيرات الدالة g :

