

$$z_0 \in \mathbb{R} \quad (-1, 1)$$

z_0 حل للمعادلة (E) يعني:

$$\begin{aligned} z_0^3 - (3+2i)z_0^2 + 2(1+5i)z_0 - 8i &= 0 \\ \Leftrightarrow (z_0^3 - 3z_0^2 + 2z_0) + i(-2z_0^2 + 10z_0 - 8) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z_0^3 - 3z_0^2 + 2z_0 = 0 \\ -2z_0^2 + 10z_0 - 8 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z_0(z_0^2 - 3z_0 + 2) = 0 \\ z_0^2 - 5z_0 + 4 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = 1 \text{ أو } z_0 = 2 \text{ أو } z_0 = 0 \\ z_0^2 - 5z_0 + 4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

إذن العدد 1 هو الحل الوحيد الذي يحقق المعادلتين معاً، $z_0 = 1$

ب- بما أن 1 حل للمعادلة (E) فإن الحدودية

$$z^3 - (3+2i)z^2 + 2(1+5i)z - 8i \text{ تقبل القسمة على } (z-1)$$

يعني أن : $(z-1)(z^2 + bz + c) = z^3 - (3+2i)z^2 + 2(1+5i)z - 8i$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} b-1 = -(3+2i) \\ c-b = 2+10i \\ c = 8i \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2-2i \\ c = 8i \end{cases} \end{aligned}$$

$$E \Leftrightarrow (z-1)[z^2 - 2(1+i)z + 8i] = 0$$

$$z^2 - 2(1+i)z + 8i = 0 \text{ نعتبر المعادلة}$$

$$\Delta' = (1+i)^2 - 8i = -6i$$

ليكن $\delta = \alpha + i\beta$ (حيث α و β من $\mathbb{R}$) أحد الجذرين المربعين للمميز المختصر Δ' .

$$\delta^2 = \Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 6 \\ \alpha\beta < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = \beta^2 = 3 \\ \alpha\beta < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \sqrt{3} & \beta = -\sqrt{3} \\ \alpha = -\sqrt{3} & \beta = \sqrt{3} \end{cases}$$

إذن $\sqrt{3} - i\sqrt{3}$ هو أحد الجذرين المربعين لـ Δ'

وبالتالي فإن :

$$z = 1+i + \sqrt{3} - i\sqrt{3} \text{ أو } z = 1+i - \sqrt{3} + i\sqrt{3}$$

يعني أن :

$$z = (1+\sqrt{3}) + i(1-\sqrt{3}) \text{ أو } z = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})$$

$$S = \{1, (1+\sqrt{3}) + i(1-\sqrt{3}), (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})\}$$

$$|a| = \sqrt{2} \quad * \quad (1-2)$$

$$a = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$a = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} \right]$$

$$|b| = 4 \quad *$$

$$b = 4 \left[\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$b = \left[4, \frac{\pi}{3} \right]$$

(بـ)

$$\begin{aligned} az_1 &= (1-i) \left[(1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})i \right] \\ &= (1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3}) + \left[(1+\sqrt{3}) - (1-\sqrt{3}) \right] i \\ &= 2 + 2\sqrt{3}i = 2(1+i\sqrt{3}) = b \end{aligned}$$

$$\text{ج- بما أن } az_1 = b \text{ فإن } z_1 = \frac{b}{a}$$

$$z_1 = \frac{\left[4, \frac{\pi}{3} \right]}{\left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} \right]} = \left[\frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right]$$

$$z_1 = \left[2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{12} \right] \quad \text{إن}$$

نعلم أن z_1 و z_2 ، حلي المعادلة.

$$z_1 z_2 = \frac{c}{a} \quad \text{يحقان } az^2 + bz + c = 0$$

$$\text{إن } z_1 \times z_2 = 8i$$

$$\text{وبالتالي فإن : } z_2 = \frac{8i}{z_1}$$

$$z_2 = \frac{\left[8, \frac{\pi}{2} \right]}{\left[2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{12} \right]} = \left[2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{12} \right]$$

$$MO = |z_1| = 2\sqrt{2} \quad -3$$

$$MN = |b - z_1| = |1 + \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)i|$$

$$MN = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{2}$$

$$MN = MO \quad \text{إذن}$$

وبالتالي فإن المثلث OMN متساوي الساقين في M.

$$(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MN}) \equiv \arg \frac{b - z_1}{z_1} [2\pi]$$

$$\equiv \arg \frac{\bar{z}_2}{z_1} [2\pi]$$

$$\equiv \arg \bar{z}_2 - z_1 [2\pi]$$

$$\equiv \pi + \frac{\pi}{12} - \frac{7\pi}{12} [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$(MO) \perp (MN) \quad \text{إذن}$$

وبالتالي فإن OMN مثلث قائم الزاوية في M.