

1- حساب التكاملي I :

نعلم أن : $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos (a + b) + \cos (a - b)]$

Achamel

$$\cos x \cos 2x = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) \quad \text{ومنه :}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2x \, dx \quad \text{وبالتالي :}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{3x}{2} \, dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} \, dx$$

$$\frac{2}{3} \sin \frac{3x}{2} \quad \text{و} \quad 2 \sin \frac{x}{2} \quad \text{لدينا :}$$

دالتان اصليتان للدالتين التاليتين $\cos \frac{x}{2}$ و $\cos \frac{3x}{2}$ على التوالي :

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} \sin \frac{3x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \left[2 \sin \frac{x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad \text{إذن :}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \sin \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{3} \sin 0 \right) + \frac{1}{2} \left(2 \sin \frac{\pi}{4} - 2 \sin 0 \right)$$

$$= \frac{1}{3} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

2- أ- التحقق من المتساوية :

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}^* - \{-1\}$. لدينا :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

$$\text{إذن :} \quad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \quad \text{لكل } x \text{ من } \mathbb{R}^* - \{-1\}.$$

ب- حساب التكامل J :

$$J = \int_1^e \frac{\ln x}{(1+x)^2} \, dx \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = -\frac{1}{x+1} \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} u = \ln x \\ v' = \frac{1}{(1+x)^2} \end{cases} \quad \text{نضع}$$

وبالتالي :

$$J = \int_1^e u v' \, dx$$

$$\begin{aligned} &= [u v]_1^e - \int_1^e u' v \, dx \\ &= \left[-\frac{\ln x}{1+x} \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x+1} \, dx \\ &= -\left(\frac{\ln e}{1+e} - \frac{\ln 1}{1+1} \right) + \int_1^e \frac{1}{x(x+1)} \, dx \\ &= -\frac{1}{1+e} + I \\ J &= -\frac{1}{1+e} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{فإن : } (-1, -1) \end{aligned}$$

وحسب نتيجة السؤال (1-1) فإن :

