

(1) أ- إثبات المتفاوتة :

• لدينا $u_0 = 3$ ومنه $u_0 > \frac{3}{2}$

• نفترض أن $u_n > \frac{3}{2}$ لنبين أن $u_{n+1} > \frac{3}{2}$

لدينا : $u_n > \frac{3}{2}$ ومنه : $\frac{1}{u_n} < \frac{2}{3}$

أي : $\frac{9}{4u_n} < \frac{9}{4} \times \frac{2}{3}$

أي : $\frac{9}{4u_n} < \frac{3}{2}$

أي : $-\frac{9}{4u_n} > -\frac{3}{2}$

أي : $3 - \frac{9}{4u_n} > 3 - \frac{3}{2}$

أي : $u_{n+1} > \frac{3}{2}$

إذن : $u_n > \frac{3}{2}$ لكل n من IN .

ب- (u_n) متتالية تناقصية :

ليكن n عنصراً من IN . لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3 - \frac{9}{4u_n} - u_n \\ &= \frac{12u_n - 9 - 4u_n^2}{4u_n} \\ &= -\frac{4u_n^2 - 12u_n + 9}{4u_n} \\ &= -\frac{(2u_n - 3)^2}{4u_n} \end{aligned}$$

بما أن $u_n > \frac{3}{2}$ فإن $u_n > 0$ ومنه :

$$-\frac{(2u_n - 3)^2}{4u_n} < 0 \quad \text{أي :} \quad \frac{(2u_n - 3)^2}{4u_n} > 0$$

وبالتالي : $u_{n+1} - u_n < 0$ لكل n من IN .

أي : (u_n) متتالية تناقصية.

الاستنتاج :

لدينا : (u_n) تناقصية ومصفورة بالعدد $\frac{2}{3}$.

إذن : (u_n) متقاربة

ج- نهاية (u_n) :

بما أن (u_n) متقاربة فإن نهايتها ℓ حل للمعادلة :

$$4x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \text{أي} \quad 3 - \frac{9}{4x} = x$$

$$\text{أي : } (2x-3)^2 = 0 \quad \text{أي : } x = \frac{3}{2}$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{2}$$

(2) أ- متتالية هندسية :

ليكن n عنصراً من $\mathbb{N}$. لدينا :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{2}{2u_{n+1} - 3} \\ &= \frac{2}{2 \times \left(3 - \frac{9}{4u_n}\right) - 3} \\ &= \frac{2}{3 - \frac{9}{2u_n}} \\ &= \frac{4u_n}{6u_n - 9} \end{aligned}$$

ولدينا من جهة أخرى :

$$\begin{aligned} v_n + \frac{2}{3} &= \frac{2}{2u_n - 3} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{6 + 4u_n - 6}{3(2u_n - 3)} \\ &= \frac{4u_n}{6u_n - 9} \end{aligned}$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{2}{3} \quad \text{ومنه :}$$

إذن : (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول هو :

$$v_0 = \frac{2}{2u_0 - 3} = \frac{2}{2 \times 3 - 3} = \frac{2}{3}$$

ب- الحد العام للمتتالية (v_n) :

$$v_0 = \frac{2}{3} \quad \text{وحدها الأول} \quad \frac{2}{3} \quad \text{متتالية حسابية أساسها}$$

$$\text{إذن : } v_n = v_0 + nr = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(n+1)$$

استنتاج u_n بدلالة n

ليكن n عنصراً من $\mathbb{N}$. لدينا :

$$v_n = \frac{2}{2u_n - 3}$$

$$2u_n \cdot v_n - 3v_n = 2 \quad \text{أَي :}$$

$$u_n = \frac{2 + 3v_n}{2v_n} \quad \text{أَي :}$$

$$= \frac{2 + 3 \times \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}n \right)}{2 \times \frac{2}{3} \times (n+1)}$$

$$= \frac{4 + 2n}{\frac{4}{3}(n+1)}$$

$$\text{إذن : } u_n = \frac{3}{2} \times \frac{n+2}{n+1} \quad \text{لكل } n \text{ من } \mathbb{N}.$$