

(1 - I) - لاحظ أن $D_f = \mathbb{R}$

- النهايات عند محددات D_f :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x e^x} = -\infty \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{x} \right) = +\infty \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ومنه}$$

$$\text{بما أن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{فإن} :$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 + e^{-x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{إذن}$$

- حساب $f'(x)$:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 1 - e^{-x}$$

إذا كان $x > 0$ فإن $1 - e^{-x} > 0$ يعني $f'(x) > 0$

إذا كان $x < 0$ فإن $1 - e^{-x} < 0$ يعني $f'(x) < 0$

إذا كان $x = 0$ فإن $f'(x)$ تنعدم عند 0.

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

(2) من خلال جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) \geq 2 > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) > 0 \quad \text{ومنه}$$

(1 - II) أ- حسب السؤال (2 - I) لدينا :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; x + 1 + e^{-x} > 0$$

$$D_g = \mathbb{R} \quad \text{إذن}$$

ب- . لدينا

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(x + 1 + e^{-x})) = +\infty \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1 + e^{-x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \quad \text{ومنه}$$

. لدينا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x + 1 + e^{-x})) = +\infty \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 + e^{-x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \quad \text{ومنه}$$

$$(2) - \text{ لكل } x \text{ من } \mathbb{R} : g'(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + 1 + e^{-x}}$$

بما أن : $x + 1 + e^x > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$ فإن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $1 - e^{-x}$ (أنظر السؤال (1 - I))

- جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$\ln(2)$	$+\infty$

(3) أ- نضع $X = x + 1 + e^{-x}$ ، إذا كان $x \rightarrow +\infty$ فإن $X \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + 1 + e^{-x})}{x + 1 + e^{-x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1 + e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x e^x} \right) = 1 \quad \text{وبما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 1 + e^{-x}}{x} \right) \cdot \left(\frac{\ln(x + 1 + e^{-x})}{x + 1 + e^{-x}} \right) = 1 \times 0 = 0$$

وبالتالي المنحنى C_g يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأفاصيل جوار

$$\forall x \in \mathbb{R} : g(x) = \ln \left(x + 1 + \frac{1}{e^x} \right) \quad \text{ب- .}$$

$$= \ln \left(\frac{x e^x + e^x + 1}{e^x} \right)$$

$$= \ln (x e^x + e^x + 1) - \ln e^x$$

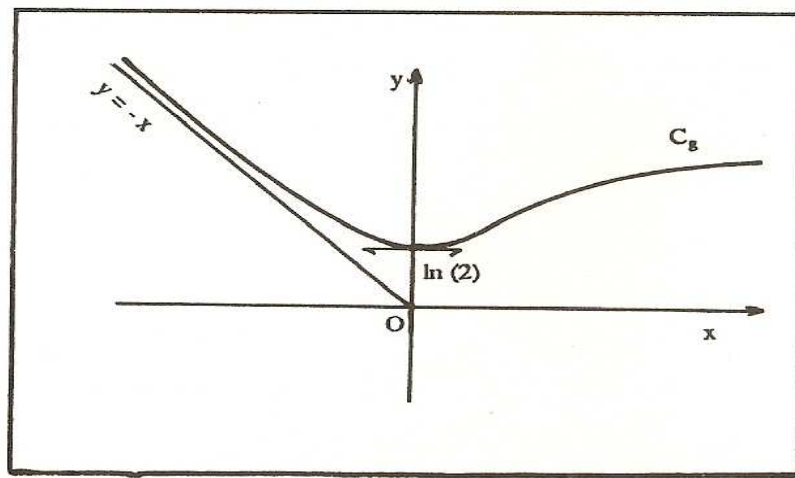
$$= \ln (x e^x + e^x + 1) - x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; g(x) = -x + \ln (x e^x + e^x + 1) \quad : \text{ إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) + x) = 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln (x e^x + e^x + 1)) = 0$$

وهذا يعني أن المستقيم ذي المعادلة $y = -x$ مقارب للمنحنى C_g جوار $-\infty$.



(4)

Achamel