

(1) (v_n) متتالية هندسية :
ليكن n عنصراً من $\mathbb{N}$. لدينا :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+2} - u_{n+1} \\
&= [(1 + \sqrt{2}) u_{n+1} - \sqrt{2} u_n] - u_{n+1} \\
&= \sqrt{2} (u_{n+1} - u_n)
\end{aligned}$$

وبما أن $v_n = u_{n+1} - u_n$ فإن $v_{n+1} = \sqrt{2} v_n$ إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها $\sqrt{2}$ وحدها الأول

$$v_0 = u_1 - u_0 = 4 - 2 = 2$$

(2) أ- حساب u_n بدلالة n :

ليكن n عنصراً من $\mathbb{N}$ لدينا :

$$v_0 = u_1 - u_0$$

$$v_1 = u_2 - u_1$$

$$v_2 = u_3 - u_2$$

⋮

$$v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$$

وبجمع هذه المتساويات طرفاً طرفاً وبعد الاختزال نحصل على :

$$v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = u_n - u_0$$

بما أن (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 2$ وأساسها $q = \sqrt{2}$ فإن :

$$\begin{aligned}
v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} &= v_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} \\
&= 2 \times \frac{1 - (\sqrt{2})^n}{1 - \sqrt{2}}
\end{aligned}$$

$$u_n - u_0 = 2 \times \frac{1 - (\sqrt{2})^n}{1 - \sqrt{2}} \quad \text{إذن :}$$

$$u_n - 2 = 2 \times \frac{1 - (\sqrt{2})^n}{1 - \sqrt{2}} \quad \text{أي :}$$

$$u_n = 2 + 2 \times \frac{1 - (\sqrt{2})^n}{1 - \sqrt{2}} \quad \text{أي :}$$

ب- نهاية (u_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - (\sqrt{2})^n}{1 - \sqrt{2}} = +\infty \quad \text{لدينا :}$$

$$\left(1 - \sqrt{2} < 0 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - (\sqrt{2})^n) = -\infty \text{ لان } \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + 2 \frac{1 - (\sqrt{2})^n}{1 - \sqrt{2}} \right) = +\infty \quad \text{إذن :}$$

(3) أ- اثبات المتفاوتة :

ليكن n عنصراً من $\mathbb{N}$ لدينا :

$$v_n > 0 \quad \text{و} \quad -1 \leq \cos v_n \leq 1$$

$$-2 v_n \leq 2 v_n \cos v_n \leq 2 v_n \quad \text{ومنه :}$$

$$-2 v_n \leq -2 v_n \cos v_n \leq 2 v_n \quad \text{أي :}$$

$$v_n^2 - 2 v_n + 1 \leq w_n \leq v_n^2 + 2 v_n + 1 \quad \text{أي :}$$

$$\text{إذن : } w_n \geq (v_n - 1)^2 \quad \text{لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

ب- نهاية (w_n) :

$$w_n \geq (2(\sqrt{2})^n - 1)^2 \quad \text{أي : } w_n \geq (v_n - 1)^2 \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_n 2(\sqrt{2})^n = +\infty \quad \text{فإن } \sqrt{2} > 1 \quad \text{وبما أن}$$

$$\lim_n (2(\sqrt{2})^n - 1) = +\infty \quad \text{ومنه :}$$

$$\lim_n w_n = +\infty \quad \text{إذن :}$$