

(1) حساب u_2 :

$$u_2 = \frac{2 \times (1) + 2}{3 \times (1)} u_1 \quad \text{لدينا :}$$

$$u_2 = \frac{2 + 2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$$

(2) أ - متتالية هندسية : (v_n)

ليكن n عنصراً من $\mathbb{N}^*$ لدينا :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{n+1} \times u_{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \times \frac{2n+2}{3n} u_n \end{aligned}$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{n} u_n \quad \text{ومنه :}$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3} v_n \quad \text{أي :}$$

وهذا يعني أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها

$$v_1 = \frac{1}{1} u_1 = \frac{2}{3} \quad \text{الاول}$$

ب - كتابة v_n بدلالة n :

$$v_1 = \frac{2}{3} \quad \text{وحدها الاول} \quad q = \frac{2}{3} \quad \text{متتالية هندسية أساسها}$$

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} \quad \text{إذن :}$$

$$v_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{أي :}$$

استنتاج u_n بدلالة n :

$$v_n = \frac{1}{n} u_n \quad \text{ليكن } n \text{ عنصراً من } IN^* \text{ لدينا :}$$

$$u_n = n \cdot v_n \quad \text{أي :}$$

$$u_n = n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{ومنه :}$$

(3) حساب S_n :

ليكن n عنصراً من IN^* لدينا :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \dots + \frac{u_n}{n} \\ &= v_1 + v_2 + \dots + v_n \end{aligned}$$

بما أن (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_1 = \frac{2}{3}$ واساسها

$$q = \frac{2}{3} \quad \text{فإن :}$$

$$S_n = \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 2 \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] \quad \text{لكل } n \text{ من } IN^*$$