

(1) إثبات التضمن :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{2x(2x) - 2(x^2 + 4)}{4x^2} \quad \text{لدينا :}$$

$$f'(x) = \frac{2(x-2)(x+2)}{4x^2} \quad \text{اي :}$$

ومنه $f'(x) \geq 0$ لكل x من $[2, +\infty[$.

إذن f تزايدية على المجال $[2, 3]$.

بما أن f متصلة على $[2, 3]$ فإن :

$$f([2, 3]) = [f(2), f(3)] = \left[2, \frac{13}{6}\right]$$

وبما أن $\frac{13}{6} < 3$ فإن $f([2, 3]) \subset [2, 3]$.

(2) أ- مصغرة (u_n) :

• لدينا : $u_1 = 3$ ومنه $2 < u_1$.

• نفترض أن $2 < u_n$ ولنبين $2 < u_{n+1}$.

بما أن f تزايدية على المجال $[2, +\infty[$ فإن $f(2) < f(u_n)$.

اي : $2 < u_{n+1}$.

إذن : (u_n) مصغرة بالعدد -2 .

ب - المتتالية تناقصية :

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$ لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= f(u_n) - u_n \\ &= \frac{u_n^2 + 4}{2u_n} - u_n \end{aligned}$$

$$= \frac{4 - u_n^2}{2u_n}$$

وبما ان : $u_n > 2$ فان : $u_n > 0$ و $4 - u_n^2 < 0$

ومنه : $u_{n+1} - u_n < 0$

أي : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ تناقصية

ج- تقارب (u_n) :

لدينا : (u_n) تناقصية ومصغرة.

إذن : (u_n) متقاربة.

(3) حساب نهاية (u_n) :

بما أن f متصلة على $[2,3]$ وأن (u_n) متقاربة فان نهايتها هي

حل المعادلة $f(x) = x$ على المجال $[2,3]$. ولدينا

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4}{2x} = x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

إذن : $\lim_n u_n = 2$