

$$u_{n+1} = \sqrt{8 + \frac{u_n^2}{3}} ; n \in \mathbb{N} \quad \text{و} \quad u_0 = 0$$

$$u_1 = 2\sqrt{2} \quad (1)$$

$$0 \leq u_0 \leq 2\sqrt{3} \quad \text{لدينا} \quad (2)$$

$$\text{نفترض أن :} \quad 0 \leq u_p < 2\sqrt{3} \quad \text{من أجل } p \text{ من } \mathbb{N}$$

$$0 \leq u_{p+1} < 2\sqrt{3} \quad \text{لنبين أن :}$$

$$0 \leq u_p < 2\sqrt{3} \quad \text{لدينا :}$$

$$0 \leq u_p^2 < 12 \quad \text{إذن}$$

$$8 \leq 8 + \frac{u_p^2}{3} < 12 \quad \text{ومنه فإن}$$

$$0 \leq \sqrt{8 + \frac{u_p^2}{3}} < 2\sqrt{3} \quad \text{وبالتالي فإن}$$

$$0 \leq u_{p+1} < 2\sqrt{3} \quad \text{أي :}$$

$$\text{الخلاصة : لكل } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ لدينا : } 0 \leq u_n < 2\sqrt{3}$$

ب - لدينا لكل n من $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{8 + \frac{u_n^2}{3}} - u_n \\ &= \frac{8 + \frac{u_n^2}{3} - u_n^2}{\sqrt{8 + \frac{u_n^2}{3}} + u_n} \end{aligned}$$

$$= \frac{8 - \frac{2}{3} u_n^2}{\sqrt{8 + \frac{2}{3} u_n^2 + u_n}}$$

بما أن $0 \leq u_n < 2\sqrt{3}$ لكل n من $\mathbb{N}$ فإن $-8 < -\frac{2}{3} u_n^2 \leq 0$

أي $8 - \frac{2}{3} u_n^2 > 0$ إذن لكل n من $\mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n > 0$

وبالتالي (u_n) تزايدية قطعا.

ج - لدينا (u_n) متتالية تزايدية ومكبورة بالعدد $2\sqrt{3}$ إذن فهي متقاربة.

(3) أ - لدينا لكل n من $\mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = 12 - u_{n+1}^2$$

$$v_{n+1} = 12 - \left(8 + \frac{2}{3} u_n^2\right) \quad \text{إذن :}$$

$$v_{n+1} = \frac{12 - u_n^2}{3} \quad \text{أي :}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n \quad \text{أي :}$$

ومنه فإن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = 12$

ب - • لدينا لكل n من $\mathbb{N}$

$$v_n = v_0 \cdot q^n$$

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = 12 \left(\frac{1}{3}\right)^n} \quad \text{إذن}$$

•• لدينا لكل n من $\mathbb{N}$ $u_n^2 = 12 - v_n$

ونعلم أن لكل n من $\mathbb{N}$ $u_n \geq 0$

إذن لكل n من $\mathbb{N}$ $u_n = \sqrt{12 - v_n}$

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = 2\sqrt{3} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}} \quad \text{أي}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \quad \text{فإن} \quad \left|\frac{1}{3}\right| < 1 \quad \text{ج. - بما أن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2\sqrt{3} \quad \text{ومنه فإن :}$$

Achamel