

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n - n - \frac{1}{2} ; n \in \mathbb{N} , u_0 = 0$$

$$u_1 = -\frac{1}{2} \quad (1)$$

(2) أ - لدينا $u_0 = 0 \geq -2 \cdot 0 - 1$
نفترض أن $u_p \geq -2p - 1$ من أجل p من $\mathbb{N}$.
لنبين أن $u_{p+1} \geq -2p - 3$

$$u_{p+1} = \frac{1}{2} u_p - p - \frac{1}{2} \quad \text{لدينا}$$

$$u_p \geq -2p - 1 \quad \text{بما أن}$$

$$\frac{1}{2} u_p \geq -p - \frac{1}{2} \quad \text{فإن}$$

$$\frac{1}{2} u_p - p - \frac{1}{2} \geq -2p - 1 \quad \text{إذن}$$

$$-2p - 1 \geq -2p - 3 \quad \text{وبما أن}$$

$$u_{p+1} \geq -2p - 3 \quad \text{فإن}$$

الخلاصة : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq -2n - 1$

ب - لدينا لكل n من $\mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} u_n - n - \frac{1}{2} - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2} u_n - n - \frac{1}{2} \quad \text{أي لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

$$u_n \geq -2n - 1 \quad \text{بما أن لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

$$-\frac{1}{2} u_n - n - \frac{1}{2} \leq 0 \quad \text{فإن لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

$$u_{n+1} - u_n \leq 0 \quad \text{أي لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

ومنه فإن (u_n) تناقصية.

(3) أ - لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا :

$$v_{n+1} = 2u_{n+1} + 4(n+1) - 6$$

$$v_{n+1} = 2\left(\frac{1}{2} u_n - n - \frac{1}{2}\right) + 4n - 2 \quad \text{أي لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

$$v_{n+1} = u_n + 2n - 3 \quad \text{أي}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} (2u_n + 4n - 6) \quad \text{أي}$$

ومنه : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$

وبالتالي : (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول : $v_0 = -6$.

بـ . بما أن (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ فإن لكل n من $\mathbb{N}$

$$v_n = -6 \left(\frac{1}{2} \right)^n \quad \text{أي} \quad v_n = v_0 (q)^n$$

ولدينا :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = 2u_n + 4n - 6$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{1}{2} v_n - 2n + 3$$

أي

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = 3 - 2n - 3 \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

إذن

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = 3 - 2n - 3 \left(\frac{1}{2} \right)^n \quad \text{جـ . لدينا}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0 \quad \text{فإن} \quad \left| \frac{1}{2} \right| < 1 \quad \text{بما أن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \quad \text{إذن :}$$