

1- حساب التكامل I :

ليكن t عنصراً من $[0, +\infty[$. لدينا :

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{dt}{\sqrt{e^t - 1}}$$

نضع $x = \sqrt{e^t - 1}$ أي : $x^2 = e^t - 1$
 ومنه : $dx = \frac{e^t}{2\sqrt{e^t - 1}} dt$ أي : $dt = \frac{2x}{x^2 + 1}$

وبالتالي :

$$\frac{dt}{\sqrt{e^t - 1}} = \frac{1}{x} \times \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{2 dx}{x^2 + 1}$$

إذا كان $t = \ln 2$ فإن : $x = \sqrt{e^{\ln 2} - 1} = \sqrt{2 - 1} = 1$
 إذا كان $t = \ln 4$ فإن : $x = \sqrt{e^{\ln 4} - 1} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$

إذن :

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{dt}{\sqrt{e^t - 1}}$$

$$= 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 1}$$

ولدينا : $\text{Arctan } x$ دالة أصلية للدالة $\frac{1}{x^2 + 1}$

إذن :

$$I = [\text{Arctan } x]_1^{\sqrt{3}}$$

$$= -2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{6}$$

2- حساب التكامل J :

$$J = \int_1^4 \ln \left(\frac{5-x}{2x} \right) dx \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{5}{x^2 - 5x} \end{cases} \quad \text{ومنه :} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln \frac{5-x}{2x} \end{cases} \quad \text{نضع :}$$

$$J = \int_1^4 u'(x) \cdot v(x) dx \quad \text{وبالتالي :}$$

$$= \left[u(x) v(x) \right]_1^4 - \int_1^4 u(x) \cdot v'(x) dx$$

$$= \left[x \ln \frac{5-x}{2x} \right]_1^4 - \int_1^4 \frac{5x}{x^2 - 5x} dx$$

$$\diamond \left[x \ln \frac{5-x}{2x} \right]_1^4 = 4 \ln \frac{5-4}{2 \times 4} - 1 \cdot \ln \frac{5-1}{2 \times 1} \quad \text{لدينا :}$$

$$= 4 \ln \frac{1}{8} - \ln 2$$

$$= -4 \ln 8 - \ln 2$$

$$= -4 \ln 2^3 - \ln 2$$

$$= -13 \ln 2$$

$$\diamond \frac{5x}{x^2 - 5x} = \frac{5x}{x(x-5)} \quad \text{ولدينا :}$$

$$\text{وبما أن : } 1 < x < 4 \quad \text{فإن } x \neq 0 \quad \text{ومنه :}$$

$$\frac{5x}{x(x-5)} = 5 \cdot \frac{1}{x-5}$$

$$\text{وبما أن : } (x-5)' = 1 \quad \text{فإن :}$$

$$5 \cdot \frac{1}{x-5} = 5 \cdot \frac{(x-5)'}{x-5}$$

$$\frac{(x-5)'}{x-5} \quad \text{ونعلم أن : } \ln |x-5| \quad \text{دالة أصلية للدالة}$$

$$\int_1^4 \frac{5x dx}{x^2 - 5x} = 5 \int_1^4 \frac{(x-5)'}{x-5} dx \quad \text{وبالتالي :}$$

$$= 5 [\ln |x-5|]_1^4$$

$$= -5 \ln 4$$

$$= -10 \ln 2$$

$$J = (-13 \ln 2) - (-10 \ln 2) \quad \text{إذن :}$$

$$= -3 \ln 2$$

Achamel

www.achamel.info
www.Achamel.net
www.Achamel.org
www.Achamel.ma