

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ لدينا } -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} = +\infty \text{ يعني أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 1} = +\infty \text{ وبما أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}) = -\infty \text{ فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ ومنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1} - 1}{x - 1} \quad (-1-2)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(1 + \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \sqrt{x^2 - 1} = 0^+ \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 \text{ لأن}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty$$

وبالتالي فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين 1 و (C) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأرتيب الموجبة عند النقطة $A(1,1)$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1} + 1}{x + 1}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \left(1 + \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \sqrt{x^2 - 1} = 0^+ \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -2 \text{ لأن}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = -\infty$$

الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يسار 1 و (C) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو محور الأرتيب الموجبة عند النقطة $B(-1,-1)$

$$x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[\quad (-ب)$$

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(\forall x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[) \quad f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

(ج-) لدينا : $(\forall x \in]1, +\infty[) \sqrt{x^2 - 1} + x > 0$

وبالتالي فإن $(\forall x \in]1, +\infty[) f'(x) > 0$

إذن f دالة تزايدية على $]1, +\infty[$

$(\forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1}(\sqrt{x^2 - 1} - x)} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1}(\sqrt{x^2 - 1} - x)} \end{aligned}$$

$(\forall x \in]-\infty, -1[) (\sqrt{x^2 - 1} - x) > 0$

إذن $(\forall x \in]-\infty, -1[) f'(x) < 0$

وبالتالي فإن f تناقصية على $]-\infty, -1[$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'(x)	-			+
f(x)	0 ↘	1	1	↗ $+\infty$

(3-أ-) $x \in]1, +\infty[$

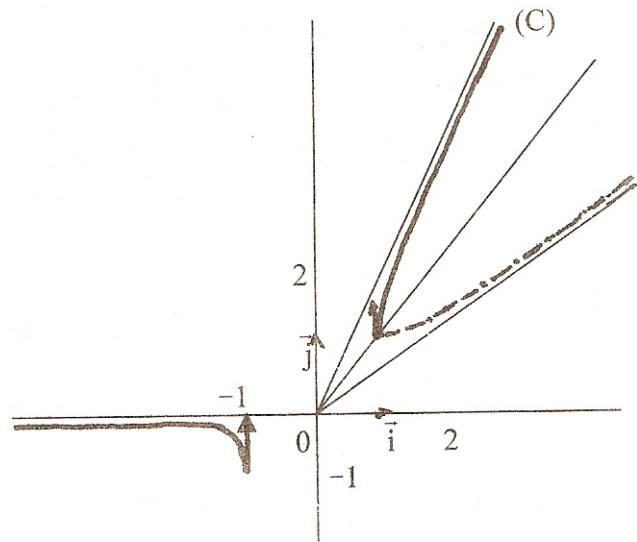
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} + x) = +\infty$$

إذن المنحنى (C) يقبل مقارب بجوار $+\infty$ معادلته $y = 2x$

(ب-)



1- دالة متصلة وتزايدية قطعاً على I .

$$g(I) = I$$

إذن g تقابل من I نحو I .
ومنه فإن g تقبل دالة عكسية
 g^{-1} معرفة على I .