

$$u_{n+1} = \frac{7u_n + 3}{3u_n + 7} ; n \in \mathbb{N}^* \quad \text{و} \quad u_1 = \frac{7}{3}$$

(1) أ. لدينا $u_1 \geq 1$
نفترض أن : $u_p \geq 1$ من أجل p من $\mathbb{N}^*$
لنبين أن : $u_{p+1} \geq 1$

$$\begin{aligned} \text{لدينا} \quad u_{p+1} - 1 &= \frac{7u_p + 3}{3u_p + 7} - 1 \\ &= \left(\frac{4}{3u_p + 7} \right) (u_p - 1) \end{aligned}$$

$$\text{بما أن } u_p - 1 \geq 0 \quad \text{و} \quad \frac{4}{3u_p + 7} > 0 \quad \text{فإن} \quad u_{p+1} - 1 \geq 0$$

$$\text{أي} \quad u_{p+1} \geq 1$$

الخلاصة : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n \geq 1$

ب. • لدينا لكل n من $\mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{7u_n + 3}{3u_n + 7} - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3(1 - u_n^2)}{3u_n + 7} \quad \text{أي}$$

$$1 - u_n^2 \leq 0 \quad \text{لدينا} \quad \mathbb{N}^* \text{ من } n \text{ لكل أن}$$

$$u_{n+1} - u_n \leq 0 \quad \mathbb{N}^* \text{ من } n \text{ لكل أن}$$

ومنه فإن (u_n) تناقصية.

•• بما أن (u_n) تناقصية ومصغرة بالعدد 1 فهي متقاربة.

(2) أ. • لدينا لكل n من $\mathbb{N}^*$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1}$$

$$\frac{7u_n + 3}{3u_n + 7} - 1$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{7u_n + 3}{3u_n + 7} - 1}{\frac{7u_n + 3}{3u_n + 7} + 1} \quad \text{إذن :}$$

$$v_{n+1} = \frac{4(u_n - 1)}{10(u_n + 1)} \quad \text{أي}$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{5} v_n \quad \text{ومنه فإن لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^*$$

$$\text{أي } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = \frac{2}{5}$$

$$\text{ب أن } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = \frac{2}{5} \text{ وحدها الأول } v_1 = \frac{2}{5}$$

$$\text{فإن } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = v_1 \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1}$$

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = \left(\frac{2}{5} \right)^n} \quad \text{أي}$$

$$\text{ب. • لدينا : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$$

$$\text{أي } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = 1 - \frac{2}{u_n + 1}$$

$$\text{أي } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{2}{u_n + 1} = 1 - v_n$$

$$\text{أي } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$$

$$\text{بما أن } v_n = \left(\frac{2}{5} \right)^n \text{ فإن } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \frac{1 + \frac{2^n}{5^n}}{1 - \frac{2^n}{5^n}}$$

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \frac{5^n + 2^n}{5^n - 2^n}} \quad \text{وبالتالي :}$$

$$\bullet \bullet \text{ لدينا لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^* \text{ بما أن } u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n} \text{ متتالية } (v_n)$$

$$\text{هندسية أساسها } \frac{2}{5} \text{ حيث } \left| \frac{2}{5} \right| < 1 \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

$$\text{وبالتالي : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

Achamel