

$$g(x) = x e^x + 1 \quad (I)$$

$$D_g = \mathbb{R} \quad \bullet (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1 \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = (x + 1) e^x \quad \bullet$$

• لدينا إشارة $g'(x)$ هي إشارة $(x + 1)$

إذن

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	—	0	+
$g(x)$	1	$1 - e^{-1}$	$+\infty$

(2) من خلال جدول تغيرات الدالة g ، نستنتج أن :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \geq 1 - e^{-1}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} ; g(x) > 0} \quad \text{فإن} \quad 1 - e^{-1} > 0 \quad \text{وبما أن}$$

$$f(x) = \frac{x e^x - 1}{x e^x + 1} \quad (II)$$

$$(1) \text{ بما أن } \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) > 0 \text{ أي } \forall x \in \mathbb{R} \quad x e^x + 1 > 0$$

$$\text{فإن } D_f = \mathbb{R} \quad \text{ومنه فإن } \forall x \in \mathbb{R} \quad x e^x + 1 \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \quad * (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty \quad \text{لدينا :} *$$

$$t = x e^x \quad \text{نضع :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t-1}{t+1} = 1 \quad \text{أ}^* \quad (3)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(xe^x + 1) - (xe^x - 1)(xe^x + xe^x)}{(xe^x + 1)^2}$$

$$= \frac{(1+x)e^x(xe^x + 1 - xe^x + 1)}{(xe^x + 1)^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{2(1+x)e^x}{(xe^x + 1)^2}} \quad \text{إذن :}$$

$$\text{بما أن } \frac{2e^x}{(xe^x + 1)^2} > 0 \text{ لكل } x \text{ من } \mathbb{R}.$$

فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $1+x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \quad \text{أي :}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1$$

ب -

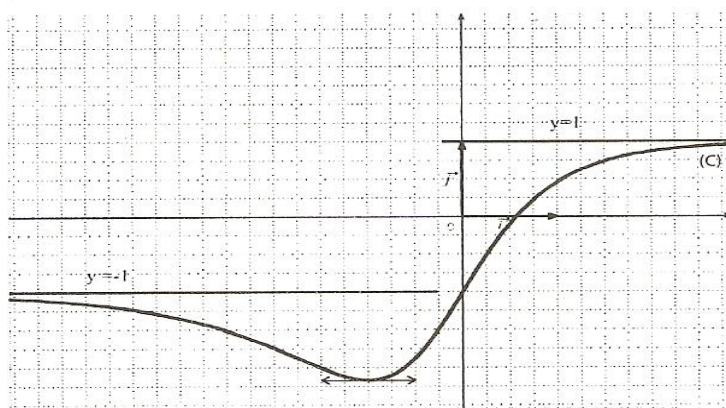
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	-1	$-\frac{e+1}{e-1}$	1

$$(4) \text{ لدينا } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}-2}{\sqrt{e}+2} < 0 \quad \text{و} \quad f(1) = \frac{e-1}{e+1} > 0$$

$$\text{بما أن } f \text{ دالة متصلة على } \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ و } f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0$$

وحسب مبرهنة القيم الوسطية فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا محصورا

بين $\frac{1}{2}$ و 1. (5)



إعداد الأستاذ : عبد المنعم الغازي

