

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (1) \text{ لدينا}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \neq 0 \quad \text{ومنه فإن}$$

إذن النقط A و B و C و D غير مستوائية

(2) أ - * لدينا

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \quad \text{إذن}$$

$$S = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \quad \text{* مساحة المثلث ABC هي}$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} \quad \text{أي هي}$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{إذن مساحة المثلث ABC هي}$$

ب - لتكن $m(x, y, z)$ نقطة من الفضاء . لدينا :

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(-1) + y \cdot 1 + z(-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y + z - 1 = 0$$

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) هي $x - y + z - 1 = 0$

(3) أ- ليكن (α, β, γ) مثلث إحداثيات H.

لدينا $H \in (ABC)$ و $(DH) \perp (ABC)$

أي $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ و $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ و $H \in (ABC)$

$$\alpha - \beta + \gamma - 1 = 0 \quad \text{ومنه فإن}$$

$$\begin{cases} (\alpha - 1)(-1) + \beta \cdot 0 + (\gamma - 1) \cdot 1 = 0 \\ (\alpha - 1) \cdot 0 + \beta \cdot 1 + (\gamma - 1) \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 1 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 1 \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$\alpha = \frac{2}{3} \quad \text{و} \quad \gamma = \frac{2}{3} \quad \text{و} \quad \beta = \frac{1}{3}$$

إذن $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ هو مثلث إحداثيات H.

$$\overrightarrow{OH} = \frac{2}{3} \vec{i} + \frac{1}{3} \vec{j} + \frac{2}{3} \vec{k} \quad \text{لدينا} *$$

$$= \frac{1}{3} (2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{i} + \vec{k} + (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \quad \text{ولدينا}$$

$$= 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \quad \text{إذن}$$

ومنه فإن H هي مركز ثقل المثلث ABC.

ب- لدينا H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوى (ABC)

$$(\Delta) = (DH)$$

$$\overrightarrow{DH} \quad \text{لدينا} \quad \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \quad \text{هو مثلث إحداثيات}$$

إذن التمثيل البارامترى للمستقيم (Δ) هو

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \lambda \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \lambda \\ z = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

(4) لتكن M(x,y,z) نقطة من الفضاء.

$$M \in (P) \Leftrightarrow MA = MD \quad \text{لدينا}$$

$$\Leftrightarrow MA^2 = MD^2$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow z^2 = (z - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2z - 1 = 0$$

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (P) هي $z = \frac{1}{2}$

(5) * لتكن (α, β, γ) مثلث إحداثيات Ω .

لدينا Ω مركز الفلكة المحيطة برباعي الأوجه ABCD ومنه فإن

$$A\Omega = B\Omega = C\Omega = D\Omega$$

لدينا $A\Omega = D\Omega$ يعني أن $\Omega \in (P)$ وحسب السؤال السابق

$$\gamma = \frac{1}{2} \quad \text{لدينا}$$

$$A\Omega = B\Omega \Leftrightarrow A\Omega^2 = B\Omega^2 \quad \text{ولدينا}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + (\gamma - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow -2\alpha = -2\gamma$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \gamma$$

$$\text{إذن} \quad \alpha = \frac{1}{2} \quad \text{ولدينا}$$

$$A\Omega = B\Omega \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha^2 - 1)^2 + (\beta - 1)^2 + (\gamma - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = -2\beta - 2\gamma + 2$$

$$\Leftrightarrow \beta = -\gamma + 1$$

$$\beta = \frac{1}{2} \quad \text{إذن}$$

وبالتالي فإن $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ هو مثلث احداثيات Ω .

* لدينا شعاع الفلكة (S) هو $r = A\Omega$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{أي} \quad r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \quad \text{بمعنى أن}$$

إذن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ هو شعاع الفلكة (S).

$$\begin{aligned} d(\Omega, (Q)) &= \frac{\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} \quad \text{لدينا} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

إذن المستوى (Q) مماس للفلكة (S).

إعداد الأستاذ : عبد العزيز فرحاني