

(1) لدينا $x^2 - x = x(x - 1)$ و $x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$ بما أن $x - 1 \geq 0$ و $\sqrt{x} - 1 \geq 0$ فإن $x \geq 1$ ومنه فإن $x(x - 1) \geq 0$ و $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) \geq 0$ وبالتالي فإن $x^2 \geq x$ و $x - \sqrt{x} \geq 0$ إذن : $\forall x \in [1, +\infty[\quad \sqrt{x} \leq x \leq x^2$

إذن : $\forall x \in [1, +\infty[\quad \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

(2) بما أن $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ لكل x من $[1, +\infty[$ و $2 > 1$

فإن : $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx \leq \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

ومنه فإن : $\left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 \leq [\ln x]_1^2 \leq [2\sqrt{x}]_1^2$

إذن : $\boxed{\frac{1}{2} \leq \ln 2 \leq 2\sqrt{2} - 2}$

إعداد الأستاذ : محمد أنفلوس