

$$f(x) = x \left(1 - \frac{1}{e^x} \right)$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow e^x \neq 0 \quad (1)$$

$$\boxed{D_f = \mathbb{R}} \quad \text{إذن}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad * (2) \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ e^x > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{1}{e^x} \quad (3) \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad * \text{لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{e^x} = 0 \quad \left(\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \right)$$

إذن المستقيم الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad * \text{لدينا :}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ e^x > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{e^x}\right) = -\infty$$

إذن محور الأرتيب اتجاه مقارب للمنحنى (C) بجوار $(+\infty)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \left(1 - \frac{1}{e^x}\right) + x \cdot \frac{e^x}{e^{2x}} \quad \text{أ} - (4)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{e^x} + \frac{x}{e^x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{e^x - 1 + x}{e^x}$$

إذن

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad e^x > 1 \Rightarrow e^x - 1 > 0 \quad \text{ب} - *$$

$$\Rightarrow e^x - 1 + x > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad e^x < 1 \Rightarrow e^x - 1 < 0 \quad *$$

$$\Rightarrow e^x - 1 + x < 0$$

$$\text{بما أن } f'(x) = \frac{e^x - 1 + x}{e^x} \text{ لكل } x \text{ من } \mathbb{R} \quad *$$

فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $e^x - 1 + x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	—	0	+
f(x)	$+\infty$	0	$+\infty$

(5) أ - *

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{(e^x + 1)e^x - e^x(e^x - 1 + x)}{e^{2x}}$$

$$= \frac{e^x + 1 - e^x + 1 - x}{e^x}$$

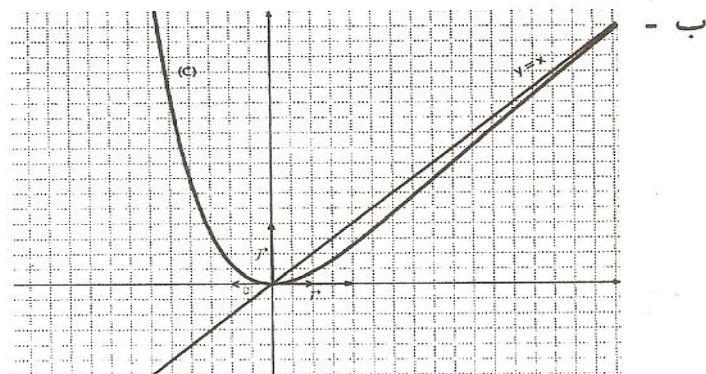
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = \frac{2 - x}{e^x}$$

إذن :

إشارة $f''(x)$:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''(x)	+	0	—

بما أن $f''(x)$ تنعدم وتغير الإشارة في 2 فإن النقطة $I(2, f(2))$ نقطة انعطاف المنحنى (C).



إعداد الأستاذ : عبد المنعم الغازي