

$$f(x) = 2x + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow e^x - 1 \neq 0 \quad * (1)$$
$$\Leftrightarrow x \neq 0$$

$$D_f = \mathbb{R}^* \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{X}{X - 1} = 1 \quad *$$
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad *$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty \quad *$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = 2 + \frac{e^x (e^x - 1) - e^x (e^x)}{(e^x - 1)^2} \quad * (2)$$

$$= 2 + \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2} \quad \text{إذن :}$$

$$2X^2 - 5X + 2 = (X - 2)(2X - 1) \quad \text{لدينا :} *$$

$$2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \quad \text{أو} \quad e^x = \frac{1}{2} \quad \bullet \quad \text{إذن :}$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-\ln 2, \ln 2\}$$

$$2e^{2x} - 5e^x + 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < e^x < 2 \quad \bullet$$

$$\Leftrightarrow -\ln 2 < x < \ln 2$$

* جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$	$+\infty$	
f'(x)	+	0	—	—	0	+
f(x)	$-\infty$	$-1-2\ln 2$	$-\infty$	$+\infty$	$2+\ln 2$	$+\infty$

(3) * بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ فإن محور الأرتايب مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$$f(x) - 2x = \frac{e^x}{e^x - 1} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{لدينا} *$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = 0 \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 0 \quad \text{بما أن}$$

ومنه فإن المستقيم الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{لدينا} *$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 1 \quad \text{و}$$

إذن المستقيم الذي معادلته $y = 2x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $(+\infty)$

(4) لدينا، لكل من D_f ، $-x$ تنتمي إلى D_f

$$f(0 - x) = f(-x) \quad \text{و}$$

$$= -2x + \frac{e^{-x}}{e^{-x} - 1}$$

$$= -2x + \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x} - 1}$$

$$= -2x + \frac{1}{1 - e^x}$$

$$\begin{aligned}
 &= -2x + \frac{1 - e^x + e^x}{1 - e^x} \\
 &= -2x + 1 + \frac{e^x}{1 - e^x} \\
 &= 2 \times \frac{1}{2} - \left(2x + \frac{e^x}{e^x - 1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\forall x \in D_f ; f(-x) = 2 \cdot \frac{1}{2} - f(x)$$

إذن :

ومنه فإن $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f) .

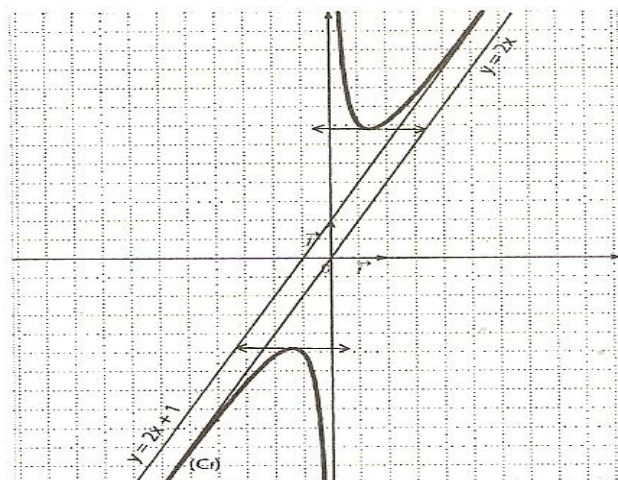
تذكير :

$A(a, b)$ مركز تماثل المنحنى (C_f) إذا وفقط إذا كان :

$$\forall x \in D_f , 2a - x \in D_f$$

$$f(2a - x) = 2b - f(x)$$

(5)



(6) لنحل مبيانيا المعادلة $2x e^x - (m - 1) e^x - 2x + m = 0$

$$2x e^x - (m - 1) e^x - 2x + m = 0 \Leftrightarrow m(1 - e^x) + 2x(e^x - 1) + e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow m(e^x - 1) = 2x(e^x - 1) + e^x$$

* إذا كان $x = 0$ فإن المعادلة تصبح : $0 = 1$

وهذا غير ممكن إذن 0 ليس حلا لهذه المعادلة (1).

• إذا كان $x \neq 0$ المعادلة تصبح :

$$m = \frac{2x(e^x - 1) + e^x}{e^x - 1} = 2x + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$m = f(x) \quad \text{أي}$$

$$\begin{cases} y = m \\ y = f(x) \end{cases} \quad \text{أي}$$

إذن عدد حلول المعادلة (1) هو عدد نقاط تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم

$y = m$ الذي معادلته (D_m)

إذن :

* إذا كان $m < -1 - 2 \ln 2$ فإن (D_m) يقطع (C_f) في نقطتين إذن المعادلة (1) تقبل حلين مختلفين .

* إذا كان $m = -1 - 2 \ln 2$ فإن (D_m) يقطع (C_f) في نقطة واحدة إذن المعادلة (1) تقبل حلال واحدا .

* إذا كان $-1 - 2 \ln^2 < m < 2 + 2 \ln 2$ فإن (D_m) لا يضع (C_f) ومنه فإن المعادلة (1) لا تقبل أي حل في $\mathbb{R}$.

* إذا كان $m = 2 + 2 \ln 2$ فإن (D) يقطع (C_f) في نقطة واحدة ومنه فإن المعادلة (1) تقبل حلا واحدا .

* إذا كان $m > 2 + 2 \ln 2$ فإن (D_m) يقطع (C_f) في نقطتين ومنه فإن المعادلة (1) تقبل حلين مختلفين .

إعداد الأستاذ : عبد المنعم الغازي