

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$$

I - نفترض أن $0 < a < 1$

$$f(x) = \sqrt{x} ; x \in I =]0, +\infty[\quad * (1)$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$$

x	0	$+\infty$
f'(x)	$+\infty$	+
f(x)	0	$+\infty$

بما أن $f(I) = I$ فإن $f(I) \subset I$

(2) • لدينا $u_0 = a$ و $0 < a < 1$

إذن $0 < u_0 < 1$

• نفترض أن $0 < u_p < 1$ ($p \in \mathbb{N}$)

لنبين أن $0 < u_{p+1} < 1$

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} u < u_p < 1 \\ f \text{ تزايدية قطاعا على } I \end{array} \right\} &\Rightarrow f(0) < f(u_p) < f(1) \\ &\Rightarrow 0 < u_{p+1} < 1 \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < u_n < 1$$

إذن

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{u_n} - u_n \\ &= \frac{u_n - u_n^2}{\sqrt{u_n} + u_n} \\ &= \frac{u_n(1 - u_n)}{\sqrt{u_n} + u_n} \end{aligned} \quad * (3)$$

بما أن $0 < u_n < 1$ فإن $u_n(1 - u_n) \geq 0$

ومنه فإن $u_{n+1} - u_n \geq 0$

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} \geq u_n$$

إذن

ومنه فإن (u_n) متتالية تزايدية.

* بما أن (u_n) تزايدية ومكبورة بالعدد 1 فإنها متقاربة.

(4) بما أن f دالة متصلة على I و $f(I) \subset I$ و $u_n \in I$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$ و (u_n) متقاربة إذن ℓ نهاية (u_n) تحقق $f(\ell) = \ell$ و $\ell > a$.

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\Leftrightarrow \sqrt{\ell} = \ell \\ &\Leftrightarrow \ell = \ell^2 \\ &\Leftrightarrow \ell(\ell - 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \quad \text{إذن}$$

II - نفترض أن $a > 1$.

(1) لدينا $u_0 = a$ و $a > 1$ إذن $u_0 > 1$.
نفترض أن $u_p > 1$ ($p \in \mathbb{N}$).

$$\begin{aligned} u_p > 1 &\Rightarrow \sqrt{u_p} > 1 \\ &\Rightarrow u_{p+1} > 1 \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > 1 \quad \text{إذن}$$

(2) * لدينا

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1 - u_n)}{\sqrt{u_n} + u_n}$$

$$\frac{u_n(1 - u_n)}{\sqrt{u_n} + u_n} \leq 0 \quad \text{فإن} \quad u_n > 1 \quad \text{بما أن}$$

$$u_{n+1} - u_n \leq 0 \quad \text{ومنه فإن}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} \leq u_n \quad \text{إذن}$$

ومنه فإن (u_n) متتالية تناقصية.

* بما أن (u_n) تناقصية ومصفورة بالعدد 1 فإنها متقاربة.

(3) * بما أن $u_n > 1$ لكل n من $\mathbb{N}$.

فإن $0 < u_{n+1} - 1$ لكل n من $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \sqrt{u_n} - 1 \\ &= \frac{u_n - 1}{\sqrt{u_n} + 1} \end{aligned}$$

بما أن $u_n > 1$ فإن $\sqrt{u_n} > 1$

ومنه فإن $\sqrt{u_n} + 1 > 2$ وبالتالي فإن $\frac{1}{\sqrt{u_n} + 1} < \frac{1}{2}$

وبما أن $u_n - 1 > 0$

فإن $\frac{u_n - 1}{\sqrt{u_n} + 1} < \frac{1}{2} (u_n - 1)$

أي $u_{n+1} - 1 < \frac{1}{2} (u_n - 1)$

الخلاصة :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad 0 < u_{n+1} - 1 < \frac{1}{2} (u_n - 1) \quad (1)$$

(4) * باستعمال العلاقة (1) لدينا

$$0 < u_1 - 1 < \frac{1}{2} (u_0 - 1)$$

$$0 < u_2 - 1 < \frac{1}{2} (u_1 - 1)$$

$$0 < u_3 - 1 < \frac{1}{2} (u_2 - 1)$$

$$0 < u_n - 1 < \frac{1}{2} (u_{n-1} - 1)$$

$$0 < u_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - 1)$$

وبما أن $u_0 = a$ و $a < 1$ و $u_n - 1 > 0$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad |u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - 1| \quad \text{فإن}$$

* بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ فإن $-1 < \frac{1}{2} < 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \quad \text{ومنه فإن}$$