

الجزء الأول :

$$g(x) = e^x - x - 1 ; x \geq 0 \quad (1)$$

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad g'(x) = e^x - 1 \quad * - \text{أ}$$

$$x > 0 \Rightarrow e^x > 1 \quad *$$

$$\Rightarrow e^x - 1 > 0$$

$$\Rightarrow g'(x) > 0$$

ب - بما أن $g'(x) > 0$ لكل x من $]0, +\infty[$

فإن g دالة تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$.

$$g(0) = 0 \quad * - \text{ج}$$

* بما أن g دالة تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$

فإن $\forall x > 0 \quad g(x) > g(0)$ أي $\forall x > 0 \quad g(x) > 0$

$$h(x) = (2 - x)e^x - 1 \quad ; \quad x \geq 0 \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^+ ; h'(x) &= -e^x + (2 - x)e^x \quad * - \text{ب} \\ &= (-1 + 2 - x)e^x \\ &= (1 - x)e^x \end{aligned}$$

* لدينا إشارة $h'(x)$ هي إشارة $(1 - x)$.

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	—
$h(x)$	1	$e - 1$	$-\infty$

ج - * لدينا : $\forall x \in [0, 1] \quad h(x) \geq 1$

إذن المعادلة $h(x) = 0$ لا تقبل أي حل في $[0, 1]$.

* ليكن h_1 قصور h على $[1, +\infty[$.

من خلال دراسة الدالة h, h_1 دالة متصلة وتناقضية قطعاً على $[1, +\infty[$

و $h_1([1, +\infty[) =]-\infty, e - 1]$.

وبما أن $0 \in]-\infty, e - 1]$ فإن المعادلة $h_1(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α .

• لدينا $h_1(1,8) = 0,2e^{1,8} - 1 > 0$ (لأن $0,2e^{1,8} - 1 \approx 0,2$)

و $h_1(1,9) = 0,1e^{1,9} - 1 < 0$ (لأن $0,1e^{1,9} - 1 \approx -0,3$)

فإن $h(1,8) \cdot h(1,9) < 0$

ومنه، ومن خلال مبرهنة القيم الوسطية، وأن $1,8 < \alpha < 1,9$

الخلاصة :

المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α وأن $1,8 < \alpha < 1,9$

د - إشارة $h(x)$: $x = \alpha \Leftrightarrow h(x) = 0$

$h(x) > 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < \alpha$

$h(x) < 0 \Leftrightarrow \alpha < x$

الجزء الثاني :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

(1) بما أن $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad g(x) > 0$

أي : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad e^x - x - 1 > 0$

فإن : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad e^x - x > 1$

ومنه فإن : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad e^x - x \neq 0$

إذن : $D_f = [0, +\infty[$

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \quad (2) \quad \text{أ -}$$

$$= \frac{e^x (1 - e^{-x})}{e^x (1 - x e^{-x})}$$

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - x e^{-x}} \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{ب - لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x e^{-x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} t e^t = 0 \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 - x e^{-x}} = 1 \quad \text{إذن :}$$

* بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ فإن المستقيم الذي معادلته $y = 1$

مقارب أفقي للمنحنى (C) بجوار $(+\infty)$.

أ - (3)

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, +\infty[\quad f'(x) &= \frac{(e^x - 1)'(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - x)'}{(e^x - x)^2} \\ &= \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - x e^x - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2} \\ &= \frac{(2 - x)e^x - 1}{(e^x - x)^2} \end{aligned}$$

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x)^2} \quad \text{إذن}$$

ب - لدينا إشارة $f'(x)$ هي إشارة $h(x)$: إذن :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	1	+	0
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	1

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1}{e^x - x} - x \quad \text{(4) أ - لدينا :}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^x - 1 - x e^x + x^2}{e^x - x} \\ &= \frac{(1 - x)e^x - (1 - x^2)}{e^x - x} \\ &= \frac{(1 - x)e^x - (1 - x)(1 + x)}{e^x - x} \\ &= \frac{(1 - x)(e^x - 1 - x)}{e^x - x} \end{aligned}$$

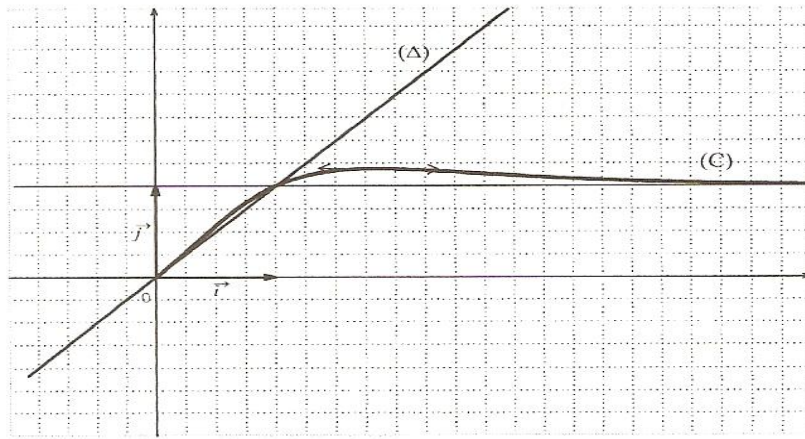
$$\forall x \in [0, +\infty[\quad f(x) - x = \frac{(1 - x)g(x)}{e^x - x} \quad \text{إذن :}$$

ب - بما أن $g(x) \geq 0$ و $e^x - x > 0$ لكل x من $[0, +\infty[$ فإن

إشارة $(f(x) - x)$ هي إشارة $(1 - x)$: إذن :

x	0	1	$+\infty$
$1-x$	+	0	—
وضع (C) بالنسبة لـ (Δ)	(C) فوق (Δ)	(C) تحت (Δ)	

(5)



إعداد الأستاذ : عبد المنعم الغازي