

الجزء الأول :

$$g(x) = \frac{e^x}{1 + 2e^x} - \ln(1 + 2e^x) \quad (1) \text{ أ -}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) &= \frac{e^x(1 + 2e^x) - e^x \cdot 2e^x}{(1 + 2e^x)^2} - \frac{2e^x}{1 + 2e^x} \\ &= \frac{e^x(1 + 2e^x - 2e^x - 2 - 4e^x)}{(1 + 2e^x)^2} \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \frac{-(1 + 4e^x)}{(1 + 2e^x)^2} \quad \text{إذن :}$$

ب - بما أن $e^x > 0$ و $1 + 4e^x > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) < 0 \quad \text{فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 - \ln(1) = 0 \quad (2) \text{ أ -}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + 2e^x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{e^x}} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 2e^x) &= +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

x	
g'(x)	—
g(x)	0 

(3) بما أن g دالة تناقصية قطعاً على $\mathbb{R}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ فإن $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) < 0$

الجزء الثاني :

$$f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x)$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) &= -2e^{-2x} \ln(1 + 2e^x) + e^{-2x} \cdot \frac{2e^x}{1 + 2e^x} \\ &= 2e^{-2x} \left[\frac{e^x}{1 + 2e^x} - \ln(1 + 2e^x) \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2e^{-2x} g(x)} \quad \text{إذن :}$$

(2) أ- نضع $X = 1 + 2e^x$ إذن $e^x = \frac{X-1}{2}$

وبالتالي : $f(x) = \frac{1}{\left(\frac{X-1}{2}\right)^2} \cdot \ln X = \frac{4}{(X-1)^2} \cdot \ln X$

إذن : $f(x) = \frac{4X}{(X-1)^2} \cdot \frac{\ln X}{X}$

ب- عندما يؤول x إلى $+\infty$ فإن X يؤول إلى $+\infty$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4X}{(X-1)^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{X} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4X}{(X-1)^2} \cdot \frac{\ln X}{X} = 0$$

(3) نضع $t = 2e^x$

عندما يؤول x إلى $-\infty$ ، t تؤول إلى 0 و $t > 0$

إذن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{\ln(1+t)}{\left(\frac{t}{2}\right)^2}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{4}{t} \cdot \frac{\ln(1+t)}{t} \\ &= +\infty \cdot 1 = +\infty \end{aligned}$$

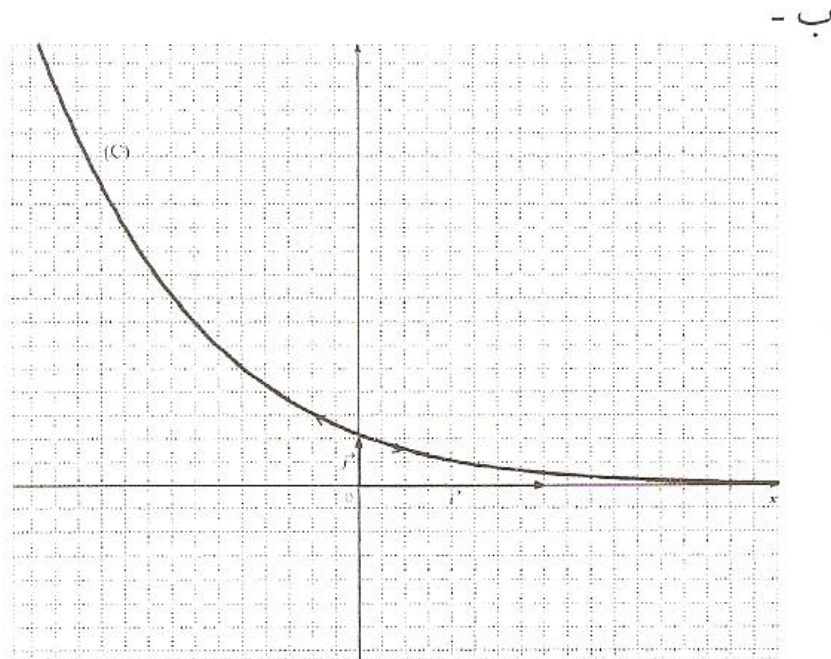
(4) بما أن $g(x) < 0$ و $e^{-2x} > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$ فإن

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) < 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	—	
$f(x)$	$+\infty$	0

(5) أ- لدينا $f(0) = \ln(3)$ و $f'(0) = \frac{2}{3} - 2\ln(3)$

إذن معادلة (T) هي $y = \left(\frac{2}{3} - 2\ln(3)\right)x + \ln(3)$



إعداد الأستاذ : عبد المنعم الغازي