

$$g(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{x}{x+1} \quad - I$$

$$x \in D \Leftrightarrow x+1 \neq 0 \text{ , } \frac{x}{x+1} > 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x(x+1) > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$$

$$D =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[\quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right) = 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1} \quad * - a \quad (2)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{x}{x+1}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1 \quad *$$

$$\begin{aligned} \forall x < -1 \quad g(x) &= \ln\left(\frac{-x}{-(x+1)}\right) - \frac{x}{x+1} - b \\ &= \ln(-x) - \ln(-x-1) - \frac{x}{x+1} \end{aligned}$$

$$g(x) = \ln(-x) + \frac{(-x-1)\ln(-x-1) - x}{x+1} \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \ln(-x) = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} (-x-1)\ln(-x-1) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} t \ln t = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} (-x-1)\ln(-x-1) - x = 1 \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{(-x-1)\ln(-x-1) - x}{x+1} = -\infty \quad \text{ومنه فإن}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} g(x) = -\infty \quad \text{وبالتالي فإن}$$

- b

$$* \text{ بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1 \text{ فإن المستقيم الذي معادلته } y = -1$$

مقارب أفقي للمنحنى (C_g) بجوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$.

$$* \text{ بما أن } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty \text{ فإن المستقيم الذي معادلته } x = 0$$

مقارب عمودي للمنحنى (C_g) .

$$* \text{ بما أن } \lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = -\infty \text{ فإن المستقيم الذي معادلته } x = -1$$

مقارب عمودي للمنحنى (C_g) .

*(3)

$$\begin{aligned} \forall x \in D \quad g'(x) &= \frac{1}{\frac{(x+1)^2}{x}} - \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x+1-x}{x(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\forall x \in D \quad g'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2} \quad \text{إذن :}$$

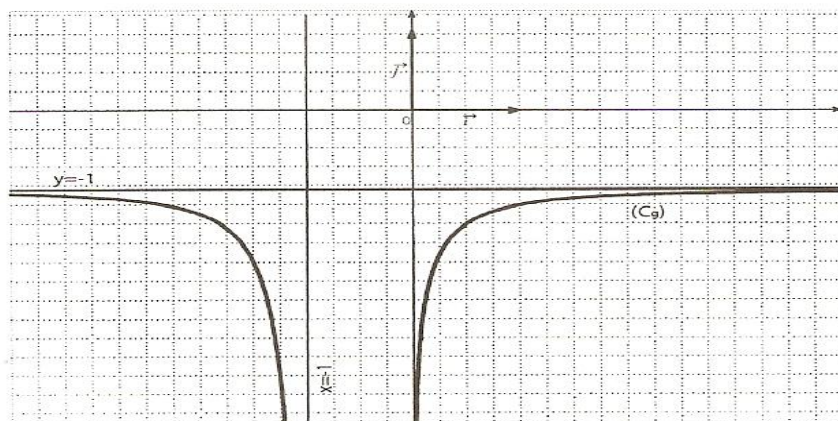
x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	—		+	
$g(x)$	$\swarrow$	$\searrow$	$\swarrow$	$\searrow$

* من خلال جدول تغيرات g ، نستنتج أن $g(x) < -1$ $\forall x \in D_g$

$$\boxed{\forall x \in D_g \quad g(x) < 0}$$

إذن

(4)



$$\begin{cases} f(x) = x \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) - x & ; x > 0 \\ f(x) = e^{-2x} + 2x e^{-x} - 1 & ; x \leq 0 \end{cases} \quad - II$$

$$f(0) = 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 - 1 = 0 \quad (1) \text{ لدينا}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (e^{-2x} + 2x e^{-x} - 1) \\ &= 0 = f(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) - x \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x \ln x - x \ln(x+1) - x) \\ &= 0 = f(0) \end{aligned}$$

إذن f دالة متصلة في 0.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{e^{-2x} + 2x e^{-x} - 1}{x} \quad * (2) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left[2e^{-x} - 2 \cdot \frac{e^{-2x} - 1}{-2x} \right] \\ &= 2 - 2 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

إذن f قابلة للاشتقاق على اليسار في 0 و $f'_g(0) = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\ln \left(\frac{x}{x+1} \right) - 1 \right) \quad * \\ &= -\infty \end{aligned}$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر.

الخلاصة: f غير قابلة للاشتقاق في الصفر.

التأويل الهندسي:

المنحى (C_f) يقبل نصف مماس أفقي على اليسار في الصفر ونصف مماس عمودي على اليمين في الصفر.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\ln \left(\frac{x}{x+1} \right) - 1 \right) \quad * (3)$$

$$= +\infty (\ln(1) - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} \left(-\frac{e^{-x}}{-x} + 2 \right) - 1 \quad *$$

$$= +\infty$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = -\infty \text{ لأن } \right)$$

$$\forall x < 0 \quad \frac{f(x)}{x} = e^{-x} \left(-\frac{e^{-x}}{-x} + 2 \right) - \frac{1}{x} \quad * - a (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{e^{-x}}{-x} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad *$$

فإن محور الأرتايب اتجاه مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $(-\infty)$.
b - لدينا :

$$\forall x > 0 \quad f(x) + (x+1) = x \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) + 1$$

$$= 1 - x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)$$

$$= 1 - \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}}$$

نضع $t = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + (x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)$$

$$= 1 - 1 = 0$$

إذن المستقيم $y = -x - 1$: (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $(+\infty)$.
* - a (5)

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad f'(x) = \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) + x \cdot \frac{1}{x \cdot (x+1)} - 1$$

$$= \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) - \frac{x}{x+1}$$

$$\forall x > 0 ; f'(x) = g(x)$$

إذن

$$\begin{aligned} \forall x < 0 \quad f'(x) &= -2e^{-2x} + 2(e^{-x} - xe^{-x}) \quad * \\ &= 2(1 - x - e^{-x})e^{-x} \end{aligned}$$

$$\forall x < 0 ; f'(x) = 2(1 - x - e^{-x})e^{-x}$$

إذن

$$x \leq 0 \quad \text{مع} \quad u(x) = 1 - x - e^{-x} \quad \text{نضع - b}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^- \quad u'(x) = e^{-x} - 1$$

$$x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0$$

$$\Rightarrow e^{-x} - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow u'(x) \geq 0$$

$$u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

إذن u دالة تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}^-$.

$$x < 0 \Rightarrow u(x) < u(0) \quad \text{ومنه فإن :}$$

$$\Rightarrow 1 - x - e^{-x} < 0$$

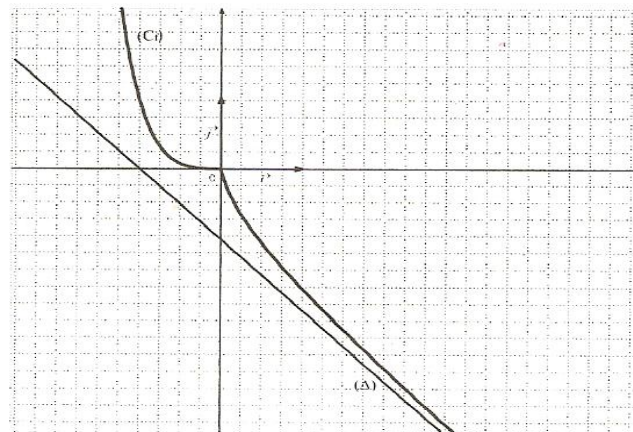
$$\forall x < 0 \quad 1 - x - e^{-x} < 0$$

إذن

- c

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	—
$f(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

(6)



إعداد الأستاذ : عبد المنعم الغازي