

1- حساب التكامل I :

نلاحظ : $x \sqrt{x^2 + 3} = \frac{1}{2} (2x) (x^2 + 3)^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{2} (x^2 + 3)' (x^2 + 3)^{\frac{1}{2}}$$

ومنه : $\frac{1}{2} x \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} (x^2 + 3)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} (x^2 + 3)^{\frac{3}{2}}$ دالة أصلية

للدالة $x \rightarrow x \sqrt{x^2 + 3}$

إذن : $I = \int_{-1}^{\sqrt{6}} x \sqrt{x^2 + 3} dx$

$$= \left[\frac{1}{3} (x^2 + 3)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{1}{3} \left(9^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \right)$$

وبما أن $4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = 8$ و $9^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{9})^3 = 27$ فإن :

$$I = \frac{1}{3} (27 - 8) = \frac{19}{3}$$

2- حساب التكامل J :

ليكن x عنصراً من [0, 4] . لدينا :

$$J = \int_0^4 \frac{x}{(1 + \sqrt{x})^2} dx$$

نضع $t = 1 + \sqrt{x}$ أي : $\sqrt{x} = t - 1$ أي : $x = (t - 1)^2$

ومنه : $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ و $dx = 2(t - 1) dt$

إذا كان $x = 0$ فإن : $t = 1 + \sqrt{0} = 1$

إذا كان $x = 4$ فإن : $t = 1 + \sqrt{4} = 3$

$$\begin{aligned} \frac{x}{(1 + \sqrt{x})^2} dx &= \frac{(t-1)^2}{t^2} \times 2(t-1) dt : \text{ولدينا من جهة أخرى} \\ &= 2 \cdot \frac{(t-1)^3}{t^2} dt \\ &= 2 \frac{t^3 - 3t^2 + 3t - 1}{t^2} dt \\ &= 2 \left(t - 3 + \frac{3}{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \int_1^3 2 \left(t - 3 + \frac{3}{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt && \text{إذن :} \\ &= 2 \int_1^3 (t-3) dt + 2 \int_1^3 \frac{3}{t} dt - 2 \int_1^3 \frac{dt}{t^2} \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} t^2 - 3t \right]_1^3 + 2 [3 \ln t]_1^3 - 2 \left[-\frac{1}{t} \right]_1^3 \\ &= 2 \left(\frac{9}{2} - 9 - \frac{1}{2} + 3 \right) + 2 (3 \ln 3 - 3 \ln 1) + 2 \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \\ &= 2(-2) + 6 \ln 3 - \frac{4}{3} \\ &= 6 \ln 3 - \frac{16}{3} \end{aligned}$$

3- حساب التكامل K :
ليكن x عنصراً من $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$. لدينا :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x - 3) \cos x \, dx$$

$$\begin{cases} u'(x) = 4 \\ v(x) = \sin x \end{cases} \quad \text{ونضع} \quad \begin{cases} u(x) = 4x - 3 \\ v'(x) = \cos x \end{cases}$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x) \cdot v'(x) \, dx \quad \text{وبالتالي :}$$

$$= [u(x) \cdot v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x) \cdot v(x) \, dx$$

$$= [(4x - 3) \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 4 \sin x \, dx$$

$$\begin{aligned} &= (2\pi - 3) \sin \frac{\pi}{2} - 0 - 4 \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi - 3 - 4 \\ &= 2\pi - 7 \end{aligned}$$

www.achamel.info
www.Achamel.net
www.Achamel.org
www.Achamel.ma

