

(1) لكل $\alpha \in \mathbb{R}$ لدينا :

$$\begin{aligned} 2 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) &= 2 \left(\cos \alpha \cos \frac{\pi}{6} + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha \right) \\ &= \sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha \end{aligned}$$

(2) أ- لكل x من $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cos 3x + \sin 3x &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 3x + \frac{1}{2} \sin 3x \right) \\ &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \cos 3x + \sin \frac{\pi}{6} \sin 3x \right) \\ &= 2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{وبما أن :}$$

$$(E) \Leftrightarrow 2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{فإن :}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow (E')$$

ب- حل المعادلة E :

$$(E) \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

يعني أن :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{6} = x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \\ \text{أو} \\ 3x - \frac{\pi}{6} = -x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi; k \in \mathbb{Z} \\ \text{أو} \\ x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{أي :}$$

إن مجموعة حلول المعادلة (E) في $\mathbb{R}$ هي :

$$S = \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(3) أ- لكل $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = (\sqrt{3} \cos 3x + \sin 3x) - (\sqrt{3} \cos x + \sin x)$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \\
 &= 2 \left[\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \right] \\
 &= 2 \left[-2 \sin\left(\frac{3x - \frac{\pi}{6} + x - \frac{\pi}{6}}{2}\right) \sin\left(\frac{3x - \frac{\pi}{6} - x + \frac{\pi}{6}}{2}\right) \right] \\
 &= -4 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin x
 \end{aligned}$$

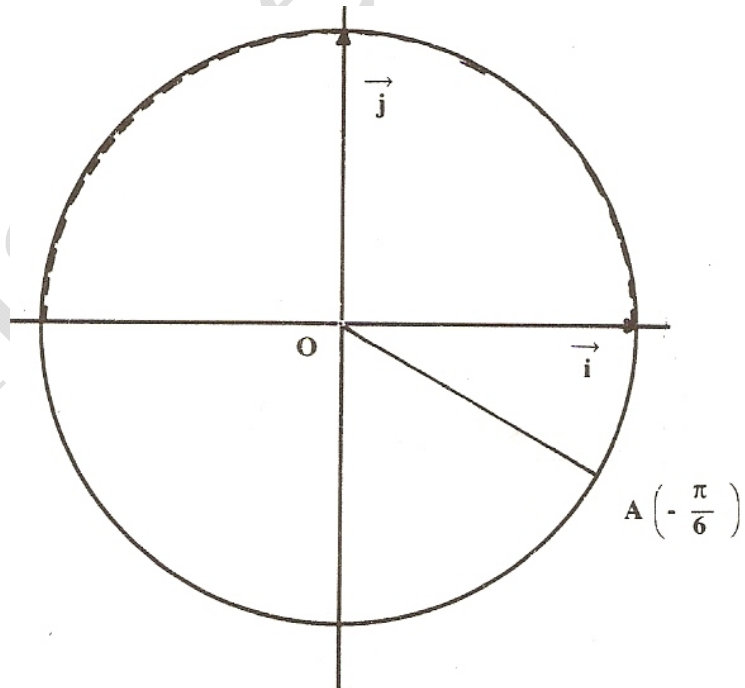
ب- نعتبر $X = 2x - \frac{\pi}{6}$

بما أن $0 \leq x \leq \pi$

فإن $-\frac{\pi}{6} \leq X \leq \frac{11\pi}{6}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin X \geq 0 \\ -\frac{\pi}{6} \leq X \leq \frac{11\pi}{6} \end{array} \right\} \text{ تكافئ } \left\{ \begin{array}{l} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \geq 0 \\ 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right.$$

ومنه المتراجحة



من الشكل يتبين أن مجموعة حلول المتراجحة $\left\{ \begin{array}{l} \sin X \geq 0 \\ -\frac{\pi}{6} \leq X \leq \frac{11\pi}{6} \end{array} \right\}$ هي الأفاصيل المنحنية لنقط الدائرة المثلثية التي

تنتمي إلى المجال $[0, \pi]$ وبما أن $x = \frac{X + \frac{\pi}{6}}{2}$

فإن : $x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$

وبالتالي فإن : $S = \left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12} \right]$

ج- لكل $x \in [0, \pi]$: $\sin x \geq 0$. ومن السؤال (3) ب- نستنتج جدول إشارة $P(x)$:

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$	π
$\sin x$	0	+	+	0
$\sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right)$	—	0	+	0
$P(x)$	0	—	0	+