

1- أ- تحديد D

بما أن $e^{2x} + 2 \neq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

فإن : $D = \{x \in \mathbb{R} / e^{2x} - 1 \geq 0\}$

$$= \{x \in \mathbb{R} / e^{2x} \geq 1\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / 2x \geq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$$

إذن : $D = [0, +\infty[$

ب- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \sqrt{e^{2x} \left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)}}{e^{2x} + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x \sqrt{1 - \frac{1}{e^{2x}}}}{e^x \left(e^x + \frac{2}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \sqrt{1 - \frac{1}{e^{2x}}}}{e^x + \frac{2}{e^x}}$$

$$= 0$$

ملاحظة : محور الأفاصيل هو إذن مقارب أفقي للمنحنى (C)

2- أ- التحقق من أن : $\frac{\sqrt{e^{2x} - 1}}{x} = \sqrt{\frac{e^{2x} - 1}{2x}} \cdot \frac{2}{x}$

ليكن x عنصرا من $]0, +\infty[$

لدينا :

$$\sqrt{\frac{e^{2x} - 1}{2x}} \cdot \frac{2}{x} = \sqrt{\frac{e^{2x} - 1}{x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{e^{2x} - 1}}{\sqrt{x^2}} = \frac{\sqrt{e^{2x} - 1}}{|x|} = \frac{\sqrt{e^{2x} - 1}}{x}$$

لكل x من $\mathbb{R}^{+*}$

إذن : $\frac{\sqrt{e^{2x} - 1}}{x} = \sqrt{\frac{e^{2x} - 1}{2x}} \cdot \frac{2}{x}$

ب- * دراسة قابلية اشتقاق f على اليمين في الصفر

لكل x من $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{4 \sqrt{e^{2x} - 1}}{x(e^{2x} + 2)}$$

$$= \frac{4}{e^{2x} + 2} \cdot \sqrt{\frac{e^{2x} - 1}{2x}} \cdot \frac{2}{x}$$

وبما أن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{e^{2x} + 2} = \frac{4}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty \quad \text{فإن:}$$

وبالتالي فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 .

* التأويل الهندسي

المنحنى (C) يقبل في النقطة $O(0, 0)$ نصف مماس رأسي موجه نحو الأعلى.

www.achamel.info
www.Achamel.net
www.Achamel.org
www.Achamel.ma

3- أ- حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$ ولدينا لكل x من $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \cdot \frac{\frac{2e^{2x}}{2\sqrt{e^{2x}-1}} \cdot (e^{2x} + 2) - 2e^{2x} \sqrt{e^{2x}-1}}{(2 + e^{2x})^2} \\ &= 4e^{2x} \frac{(e^{2x} + 2) - 2(e^{2x} - 1)}{(2 + e^{2x})^2 \sqrt{e^{2x}-1}} = 4e^{2x} \cdot \frac{e^{2x} + 2 - 2e^{2x} + 2}{(2 + e^{2x})^2 \sqrt{e^{2x}-1}} \\ &= \frac{4(4 - e^{2x})e^{2x}}{(2 + e^{2x})^2 \sqrt{e^{2x}-1}} \end{aligned}$$

ب- جدول تغيرات الدالة f

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $4 - e^{2x}$

ولدينا لكل x من $\mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - e^{2x} = 0$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = 4$$

$$\Leftrightarrow 2x = \ln 4$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2 \ln 2$$

$$\Leftrightarrow x = \ln 2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4 - e^{2x} > 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} < 4$$

$$\Leftrightarrow 2x < \ln 4$$

$$\Leftrightarrow x < \ln 2$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \ln 2$$

ومنه جدول تغيرات الدالة f :

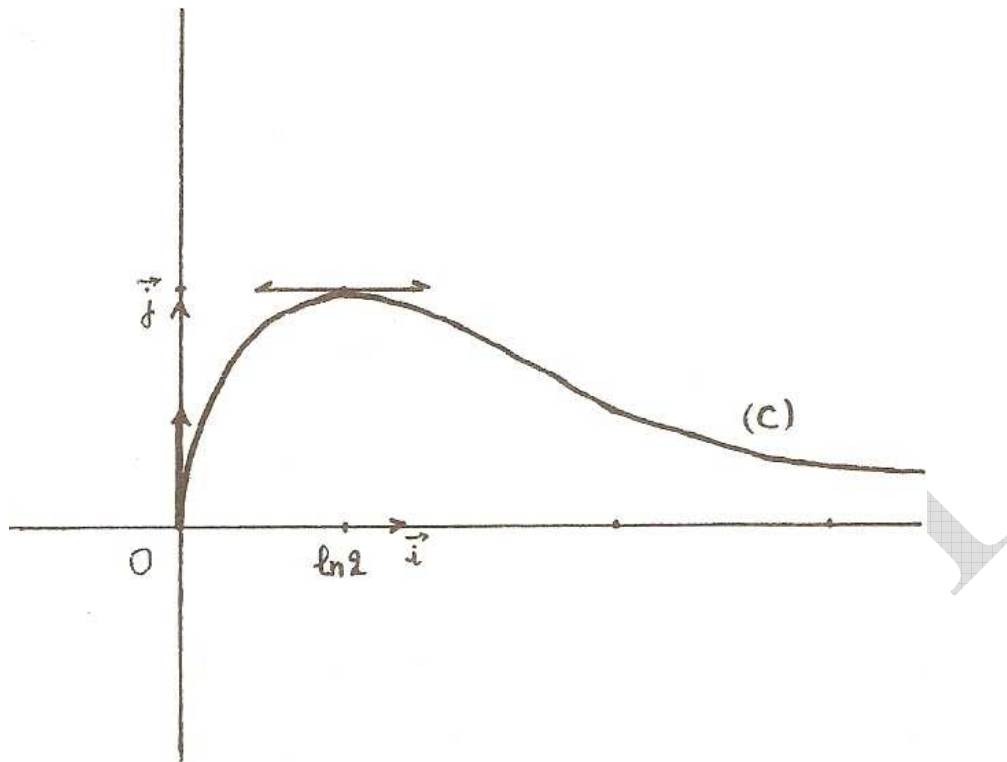
x	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$		0	-
$f(x)$	0	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	0

$$f(\ln 2) = \frac{4\sqrt{e^{2\ln 2} - 1}}{e^{2\ln 2} + 2}$$

ملاحظة :

$$= \frac{4\sqrt{e^{\ln 4} - 1}}{e^{\ln 4} + 2} = \frac{4\sqrt{4-1}}{4+2} = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

4- رسم (C)



Achamel