

1- أ- لنبين أن : $f(x) = x \left(\frac{1}{2} - \frac{\ln |x|}{x} \right) - \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{|x|} \right)$

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}^*$

لدينا :
$$\begin{aligned} x \left(\frac{1}{2} - \frac{\ln |x|}{x} \right) - \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{|x|} \right) &= \frac{x}{2} - \left(\ln |x| + \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{|x|} \right) \right) \\ &= \frac{x}{2} - \ln \left(|x| \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{|x|} \right) \right) \\ &= \frac{x}{2} - \ln \left(1 + \frac{|x|}{2} \right) = f(x) \end{aligned}$$

إذن : $f(x) = x \left(\frac{1}{2} - \frac{\ln |x|}{x} \right) - \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{|x|} \right)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$

ب- الاستنتاج

لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x) = x \left(\frac{1}{2} - \frac{\ln |x|}{x} \right) - \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{|x|} \right)$

وبما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{\ln (-x)}{(-x)} = 0$

و $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{|x|} \right) = -\ln 2$

فإن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2- أ- دراسة قابلية اشتقاق f في الصفر

لدينا :
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{2} - \ln \left(1 + \frac{x}{2} \right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{2} \right)}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 = 0$$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و $f'_d(0) = 0$

ولدينا :
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x}{2} - \ln \left(1 - \frac{x}{2} \right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\ln\left(1 + \left(-\frac{x}{2}\right)\right)}{\left(-\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليسار في 0 و $f'_g(0) = 1$

خلاصة : الدالة f غير قابلة للاشتقاق في الصفر لأن $f'_d(0) \neq f'_g(0)$

ب- دراسة تغيرات الدالة f

إذا كان $x \in \mathbb{R}^{+*}$ فإن : $f(x) = \frac{x}{2} - \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{1 + \frac{x}{2}}}{1 + \frac{x}{2}} \quad \text{وبالتالي فإن :}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-2}{2(x+2)} = \frac{x}{2(x+2)}$$

وواضح أن : $f'(x) > 0$ لكل x من $\mathbb{R}^{+*}$

وإذا كان $x \in \mathbb{R}^{-*}$ فإن : $f(x) = \frac{x}{2} - \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{1 - \frac{x}{2}}}{1 - \frac{x}{2}} \quad \text{وبالتالي فإن :}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2-x} = \frac{2-x+2}{2(2-x)} = \frac{4-x}{2(2-x)}$$

وواضح كذلك أن $f'(x) > 0$ لكل x من $\mathbb{R}^{-*}$

ومنه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	1	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

3-1- دراسة الفرعين اللانهائيين

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} - \frac{\ln |x|}{x} - \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{|x|}\right) \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{1}{2} - 0 - 0 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} - \ln\left(1 + \frac{|x|}{2}\right) - \frac{x}{2} \quad \text{و}$$

$$= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} -\ln\left(1 + \frac{|x|}{2}\right) = -\infty$$

إذن المنحنى $\propto$ يقبل بجوار $+\infty$ وبجوار $-\infty$ فرعين شلجيمين

اتجاههما المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{x}{2}$

ب- لنبين أن $f(x) \leq \frac{x}{2}$ لكل x من $\mathbb{R}$

ليكن x عددا حقيقيا

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{x}{2} &= \frac{x}{2} - \ln\left(1 + \frac{|x|}{2}\right) - \frac{x}{2} \\ &= -\ln\left(1 + \frac{|x|}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\ln\left(1 + \frac{|x|}{2}\right) \geq 0 \quad \text{فإن} \quad 1 + \frac{|x|}{2} \geq 1$$

$$-\ln\left(1 + \frac{|x|}{2}\right) \leq 0$$

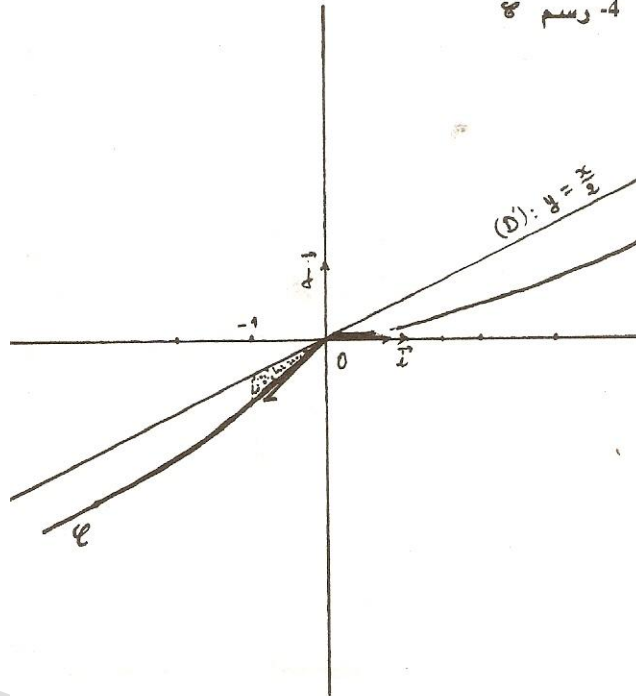
$$f(x) - \frac{x}{2} \leq 0$$

$$f(x) \leq \frac{x}{2} \quad \text{لكل } x \text{ من } \mathbb{R}$$

ملاحظة : المنحنى $\mathcal{C}$ يوجد دائما تحت المستقيم (D) ذي

$$\text{المعادلة } y = \frac{x}{2} \text{ أو يقطعه}$$

4- رسم $\mathcal{C}$



5- أ- حساب $F'(x)$

الدالة F قابلة للاشتقاق على $]-\infty, 2[$ ولدينا لكل x من $]-\infty, 2[$:

$$F'(x) = \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) + (x-2) \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{1 - \frac{x}{2}} - 1$$

$$= \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) + (x-2) \cdot \frac{-1}{2-x} - 1$$

$$= \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} - f(x)$$

ملاحظة : الدالة F هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{x}{2} - f(x)$ على المجال $]-\infty, 2[$

ب- حساب المساحة $\mathcal{A}$

بما أن $\frac{x}{2} \geq f(x)$ لكل x من $[-1, 0]$ فإن :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-1}^0 \left[\frac{x}{2} - f(x) \right] dx \\ &= [F(x)]_{-1}^0 = \left[(x-2) \ln \left(1 - \frac{x}{2} \right) - x \right]_{-1}^0 \\ &= 0 - \left(-3 \ln \frac{3}{2} + 1 \right) = 3 \ln \frac{3}{2} - 1\end{aligned}$$

وبالتالي فإن : $\mathcal{A} = -1 + 3 \ln \left(\frac{3}{2} \right)$ بوحدة المساحة

www.Achamel.net

www.Achamel.info

www.Achamel.org

www.Achamel.ma