

-1

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + 2x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+2) \geq 0$$

$$x \in]-\infty, 2] \cup [0, +\infty[$$

$$D_f =]-\infty, 2] \cup [0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ بما أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} = +\infty \text{ و}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ و}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 2x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} - x} \quad -2$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x}} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) = 1 \text{ لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - 1\right) = -2 \text{ إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \text{ وبالتالي فإن}$$

ومنه فإن المنحنى (C) يقبل مقارب بجوار $-\infty$ معادلته $y = -1$

-3

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x} + 2}{x + 2}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x + 2}\right) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \left(1 + \frac{x^2 + 2x}{(x + 2)\sqrt{x^2 + 2x}}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x}}\right) = -\infty$$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يسار -2 .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(1 + \frac{x(x+2)}{x\sqrt{x^2+2x}} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(1 + \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x}} \right)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty \quad \text{إذن}$$

وبالتالي فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين 0.

4-أ- ليكن x من $]0, +\infty[\cup]-\infty, -2[$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} = 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} \quad \text{إذن}$$

$$(\forall x \in D - \{-2, 0\})$$

$$x > 0 \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow x+1+\sqrt{x^2+2x} > 0$$

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad f'(x) > 0$$

إذن f تزايدية على المجال $]0, +\infty[$

ليكن x من D .

$$x+1+\sqrt{x^2+2x} = \frac{(x+1)^2 - (x^2+2x)}{(x+1)-\sqrt{x^2+2x}}$$

$$= \frac{1}{(x+1)-\sqrt{x^2+2x}}$$

$$x < -2 \Rightarrow \begin{cases} x+1 < -1 < 0 \\ -\sqrt{x^2+2x} < 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in]-\infty, -2[\quad f'(x) < 0$$

وبالتالي فإن الدالة f تناقصية على $] -\infty, -2[$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	-			+
$f(x)$	-1	-2	0	$+\infty$

5-أ-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + \sqrt{x^2+2x} - 2x - 1]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2+2x} - (x+1)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x - (x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x} + (x+1)}$$

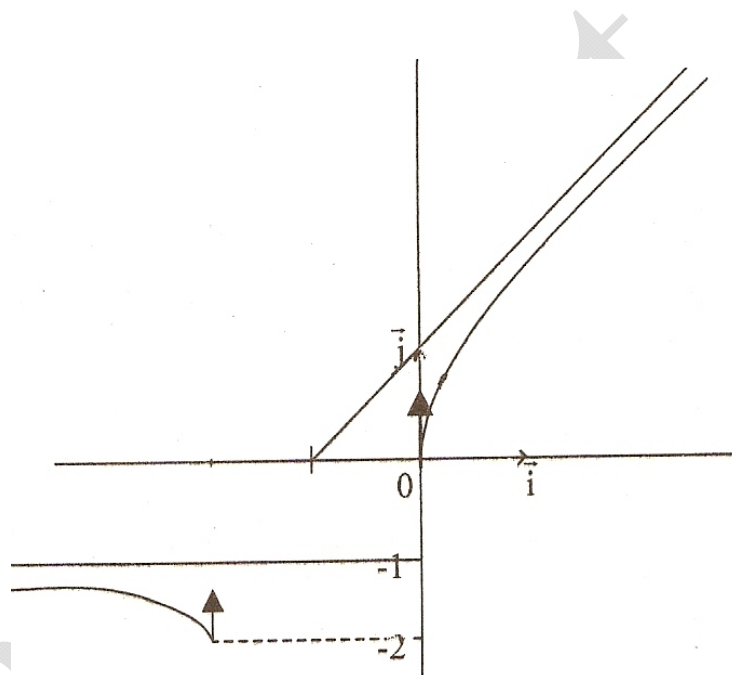
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 2x} + x + 1}$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 2x} + x + 1} = 0$$
 وبالتالي فإن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = 0$$
 يعني أن

وبالتالي فإن المستقيم الذي معادلته $y = 2x + 1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$



6-أ) g دالة متصلة وتزايدية قطعاً على $[0, +\infty[$ و $[0, +\infty[$ $g([0, +\infty[) = [0, +\infty[$

إذن g تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$.

ليكن y من $\mathbb{R}^+$.

نقوم بحل المعادلة $y = g(x)$ $x \geq 0$

$$\left(\begin{array}{l} y = g(x) \\ x \geq 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + \sqrt{x^2 + 2x} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow [y - x = \sqrt{x^2 + 2x}, x \geq 0]$$

$$\Leftrightarrow [(y - x)^2 = x^2 + 2x, x \geq 0]$$

$$[\Leftrightarrow (y^2 - 2xy + x^2 = x^2 + 2x, x \geq 0)]$$

$$\Leftrightarrow [(2y + 2)x - y^2 = 0, x \geq 0]$$

بما أن $y \geq 0$ فإن $2y + 2 \neq 0$

$$x = \frac{y^2}{2y + 2}$$
 وبالتالي فإن

$$g^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \frac{x^2}{2x+2}$$

Achamel.net