

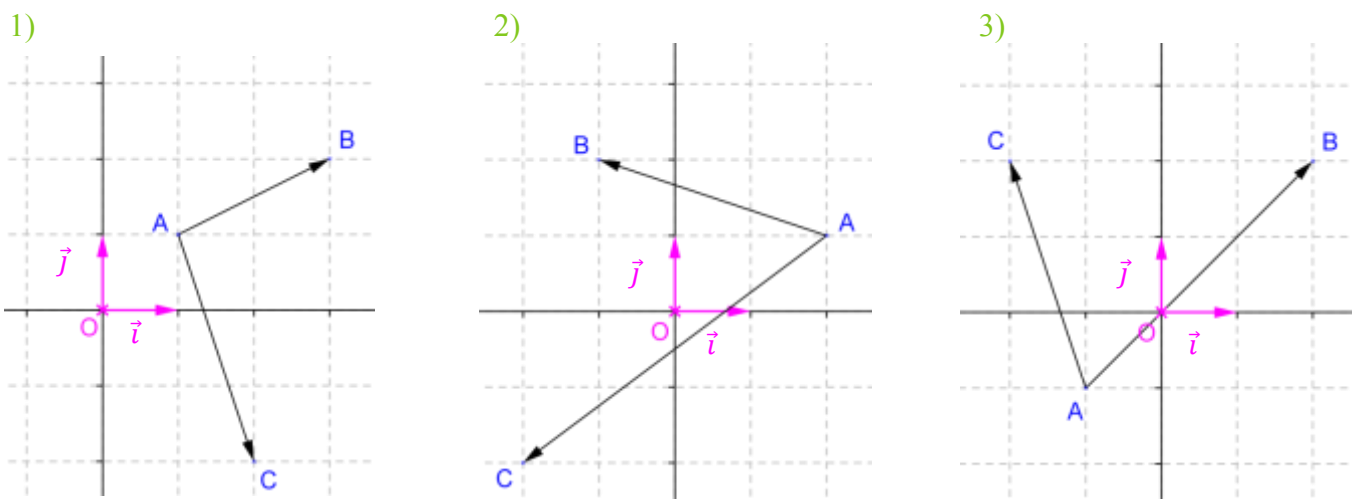
Exercices corrigés

Sont abordés dans cette fiche :

- **Exercice 1** : produit scalaire en fonction des coordonnées de vecteurs dans un repère orthonormé
- **Exercice 2** : propriétés du produit scalaire (règles de calcul et identités remarquables)
- **Exercice 3** : produit scalaire en fonction des normes de vecteurs
- **Exercices 4 et 5** : orthogonalité de deux vecteurs et produit scalaire nul
- **Exercice 6** : formule de la médiane
- **Exercice 7** : produit scalaire de vecteurs colinéaires
- **Exercices 8 et 9** : produit scalaire de vecteurs quelconques à l'aide d'une projection orthogonale
- **Exercices 10, 11, 12 et 14** : produit scalaire en fonction des normes de vecteurs et d'un angle orienté
- **Exercice 13** : quadrangle orthocentrique
- **Exercice 15** : équation cartésienne de la médiatrice d'un segment
- **Exercice 16** : équation de cercle
- **Exercices 17 et 19** : équation de tangente à un cercle
- **Exercice 18** : théorème d'Al-Kashi et somme des carrés des côtés d'un parallélogramme
- **Exercice 20** : droite d'Euler
- **Exercice 21** : recherche d'un minimum
- **Exercice 22** : algorithme de perpendicularité de deux droites dans un repère orthonormé du plan

Exercice 1

Soit un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ du plan. Dans chacun des trois cas suivants, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



Correction de l'exercice 1

Rappel : Produit scalaire dans un repère orthonormé du plan

Dans un repère orthonormé du plan, si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors le produit scalaire (euclidien) du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est donné par la relation :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Remarque : Cette expression ne doit pas être confondue avec la condition de colinéarité $xy' - x'y$.

Il convient tout d'abord de remarquer que le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est orthonormé. En effet, les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont d'une part unitaires (puisque $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$) et d'autre part orthogonaux (puisque $\vec{i} \perp \vec{j}$).

1) Les points A , B et C ont pour coordonnées respectives $(1; 1)$, $(3; 2)$ et $(2; -2)$.

Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Quant au vecteur $\overrightarrow{AC}$, il a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ -2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Il en résulte que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 1 + 1 \times (-3) = 2 - 3 = -1$

2) Graphiquement, $\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} + 1\vec{j}$. Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De même, $\overrightarrow{AC} = -4\vec{i} - 3\vec{j}$. Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

De ce fait, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 \times (-4) + 1 \times (-3) = 12 - 3 = 9$.

3) Graphiquement, $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$. Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

De même, $\overrightarrow{AC} = -\vec{i} + 3\vec{j}$. Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

De ce fait, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times (-1) + 3 \times 3 = -3 + 9 = 6$.

Exercice 2

Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs du plan tels que $\vec{i}^2 = 2$, $\|\vec{j}\| = 3$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = -4$.

Calculer $(3\vec{i} - \vec{j}) \cdot (-\vec{i} + 2\vec{j})$, $(\vec{i} - 3\vec{j})^2$, $\|2\vec{i} + 3\vec{j}\|$ en détaillant les étapes de chaque calcul.

Correction de l'exercice 2

Rappel : Propriétés du produit scalaire (symétrie et bilinéarité)

Soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et soit le réel λ .

- **Symétrie** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

- **Bilinéarité** :

✓ Linéarité par rapport à la première variable : $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ et $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v}$

✓ Linéarité par rapport à la seconde variable : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v}$

Carré scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$

1) Calculons $(3\vec{i} - \vec{j}) \cdot (-\vec{i} + 2\vec{j})$.

$$(3\vec{i} - \vec{j}) \cdot (-\vec{i} + 2\vec{j}) \stackrel{\text{bilinéarité}}{=} (3\vec{i}) \cdot (-\vec{i}) + (3\vec{i}) \cdot (2\vec{j}) - \vec{j} \cdot (-\vec{i}) - \vec{j} \cdot (2\vec{j})$$

$$= \underbrace{3 \times (-1)}_{\substack{\text{linéarité} \\ \text{par rapport aux} \\ 1^{\text{ère}} \text{ et } 2^{\text{nde}} \text{ variables}}} \vec{i} \cdot \vec{i} + \underbrace{3 \times 2}_{\substack{\text{linéarité} \\ \text{par rapport aux} \\ 1^{\text{ère}} \text{ et } 2^{\text{nde}} \text{ variables}}} \vec{i} \cdot \vec{j} - 1 \times \underbrace{(-1)}_{\substack{\text{linéarité} \\ \text{par rapport} \\ \text{à la } 2^{\text{nde}} \text{ variable}}} \vec{j} \cdot \vec{i} - 1 \times \underbrace{2}_{\substack{\text{linéarité} \\ \text{par rapport} \\ \text{à la } 2^{\text{nde}} \text{ variable}}} \vec{j} \cdot \vec{j}$$

$$= -3 \underbrace{\vec{i}^2}_{\text{carré scalaire}} + 6 \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{j}}_{\text{symétrie}} - 2 \underbrace{\|\vec{j}\|^2}_{\text{carré scalaire}} = -3\vec{i}^2 + 7\vec{i} \cdot \vec{j} - 2\|\vec{j}\|^2 = -3 \times 2 + 7 \times (-4) - 2 \times 3^2 = -52$$

Rappel : Identités remarquables

Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \quad (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \quad (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

2) Calculons $(\vec{i} - 3\vec{j})^2$.

$$(\vec{i} - 3\vec{j})^2 \stackrel{\substack{\text{identité} \\ \text{remarquable}}}{=} \vec{i}^2 + 2\vec{i} \cdot (-3\vec{j}) + (-3\vec{j})^2 = \vec{i}^2 + 2 \times \underbrace{(-3)}_{\substack{\text{linéarité} \\ \text{par rapport} \\ \text{à la } 2^{\text{nde}} \text{ variable}}} \vec{i} \cdot \vec{j} + \underbrace{(-3)^2}_{\substack{\text{linéarité} \\ \text{par rapport aux} \\ 1^{\text{ère}} \text{ et } 2^{\text{nde}} \text{ variables}}} \vec{j}^2$$

$$= 2 - 6 \times (-4) + 9 \times 9 = 107$$

3) Calculons $\|2\vec{i} + 3\vec{j}\|$.

$$\|2\vec{i} + 3\vec{j}\|^2 = (2\vec{i} + 3\vec{j})^2 \stackrel{\substack{\text{identité} \\ \text{remarquable}}}{=} (2\vec{i})^2 + 2 \times (2\vec{i}) \cdot (3\vec{j}) + (3\vec{j})^2$$

$$= \underbrace{2^2 \vec{i}^2}_{\substack{\text{linéarité} \\ \text{par rapport aux} \\ 1^{\text{ère}} \text{ et } 2^{\text{nd}} \text{ variables}}} + \underbrace{2 \times 2 \times 3 \vec{i} \cdot \vec{j}}_{\substack{\text{linéarité} \\ \text{par rapport aux} \\ 1^{\text{ère}} \text{ et } 2^{\text{nd}} \text{ variables}}} + \underbrace{3^2 \vec{j}^2}_{\substack{\text{linéarité} \\ \text{par rapport aux} \\ 1^{\text{ère}} \text{ et } 2^{\text{nd}} \text{ variables}}} = 4 \times 2 + 12 \times (-4) + 9 \times 3^2 = 41.$$

Ainsi, $\|2\vec{i} + 3\vec{j}\| = \sqrt{41}$.

Exercice 3

Soit un parallélogramme $ABCD$ tel que $AB = 5$, $AC = 6$ et $AD = 4$. Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

2) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$

3) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}$

Correction de l'exercice 3

Rappel : Produit scalaire et normes de vecteurs

Le produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ par un vecteur $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2)$$

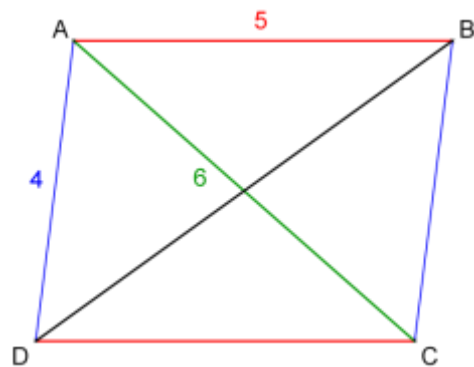
Tout d'abord, analysons l'énoncé.

$ABCD$ est un parallélogramme donc les égalités vectorielles suivantes sont vérifiées :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$



1) Calculons $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$. Par définition du produit scalaire, on a :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\|^2) \stackrel{-\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}}{=} \frac{1}{2} (AB^2 + BC^2 - \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\|^2)$$

$$\stackrel{\substack{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \\ \text{relation} \\ \text{de Chasles}}}{=} \frac{1}{2} (AB^2 + AD^2 - AC^2) = \frac{1}{2} (5^2 + 4^2 - 6^2) = \frac{1}{2} (5^2 + 4^2 - 6^2) = \frac{5}{2}$$

2) Calculons désormais $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$.

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{CA}\|^2 - \|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA}\|^2) = \frac{1}{2} (BA^2 + CA^2 - \|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\|^2) = \frac{1}{2} (BA^2 + CA^2 - CB^2)$$

$$\frac{1}{2}(5 + 6 - 4) = \frac{45}{2}$$

3) Calculons enfin $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{DC}\| + \|\overrightarrow{AB}\| - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\|) = \frac{1}{2}(AB^2 + AB^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}\|) = \frac{1}{2} \times 2AB^2 = AB^2 = 25$$

Remarque : Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. Comme $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2 = 25$

Exercice 4

Soit un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 2$ et $AD = \sqrt{2}$. I désigne le milieu de $[AB]$. Montrer que les droites (AC) et (ID) sont perpendiculaires.

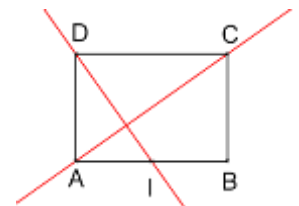
Correction de l'exercice 4

Rappel : Orthogonalité et produit scalaire nul

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Par définition du produit scalaire, on a $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{ID}\| - \|\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{AC}\|)$

Il convient donc de déterminer d'une part $\|\overrightarrow{AC}\|^2$, d'autre part $\|\overrightarrow{ID}\|^2$ et enfin $\|\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{AC}\|^2$.



- Commençons par déterminer $\|\overrightarrow{AC}\|^2$.

$ABCD$ est un rectangle donc le triangle ABC est rectangle en B . Par conséquent, d'après le théorème de Pythagore, on a : $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Or, comme $ABCD$ est un rectangle $BC = AD$, d'où $AC^2 = 2^2 + \sqrt{2}^2 = 6$.

- Déterminons désormais $\|\overrightarrow{ID}\|^2$.

En outre, I est le milieu de $[AB]$ donc, d'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle AID rectangle en A , on a : $ID^2 = IA^2 + AD^2 = (AB/2)^2 + AD^2 = (2/2)^2 + \sqrt{2}^2 = 3$

- Enfin, déterminons $\|\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{AC}\|^2$.

En utilisant la relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{AC} = \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD}}_{\overrightarrow{ID}} - \underbrace{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})}_{\overrightarrow{AC}} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

Or, $ABCD$ est un rectangle donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, si bien que $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

D'où, comme I est le milieu de $[AB]$, c'est-à-dire comme $\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, il vient que :

$$\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

Par conséquent, $\|\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{AC}\| = \left\| -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \right\| = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 \|\overrightarrow{AB}\| = \frac{9}{4} \times 2^2 = 9$

- Finalement, en remplaçant dans l'expression initiale, on obtient :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{ID} = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{ID}\| - \|\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{AC}\|) = \frac{1}{2} (6 + 3 - 9) = 0$$

Comme $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{ID} = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ID}$ sont orthogonaux. Autrement dit, **les droites (AC) et (ID) sont perpendiculaires.**

Exercice 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On donne $M(2; \lambda)$, $A(1; 3)$ et $L(4; 3 - \lambda)$. Déterminer le(s) réel(s) λ tel que le triangle MAL est rectangle en A .

Correction de l'exercice 5

Le triangle MAL est rectangle en A si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AL}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AL} = 0$.

Or, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ \lambda - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda - 3 \end{pmatrix}$.

En outre, le vecteur $\overrightarrow{AL}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_L - x_A \\ y_L - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 3 - \lambda - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\lambda \end{pmatrix}$.

$$\text{Ainsi, } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AL} = 0 \Leftrightarrow 1 \times 3 + (\lambda - 3) \times (-\lambda) = 0 \Leftrightarrow 3 - \lambda^2 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 3 = 0$$

Soit Δ le discriminant du trinôme $\lambda^2 - 3\lambda - 3$ du second degré d'inconnue λ .

$$\text{Alors } \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 9 + 12 = 21$$

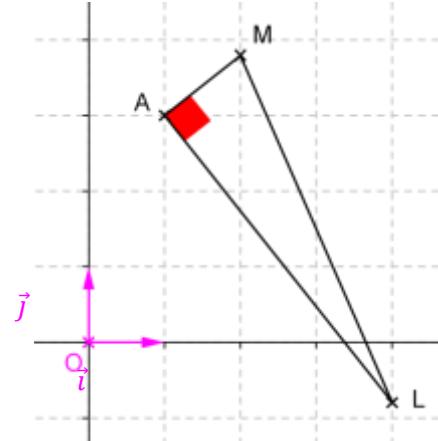
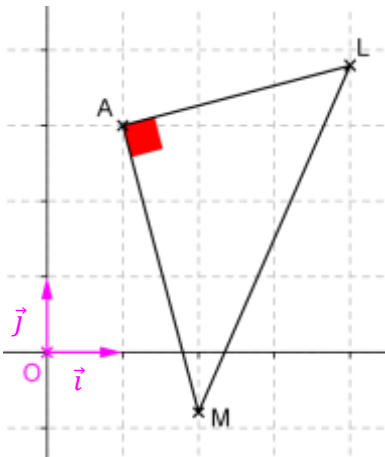
$\Delta > 0$ donc le trinôme $\lambda^2 - 3\lambda - 3$ admet deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2 , telles que :

$$\lambda_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{21}}{2 \times 1} = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{21}}{2 \times 1} = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$$

Le triangle MAL est rectangle en A si et seulement si $\lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}$ (1^{er} cas) ou si $\lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$ (2^{ème} cas).

• 1^{er} cas : $\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$

• 2^{ème} cas : $\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$



Exercice 6

Soit un triangle MAB et soit I le milieu de $[AB]$.

- 1) Démontrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.
- 2) En appliquant cette formule à un triangle MAB rectangle en M , quelle propriété connue retrouve-t-on ?
- 3) En appliquant cette formule à un triangle MAB tel que $MA = 4$, $MB = 6$ et $AB = 7$, calculer la longueur de la médiane issue de M .

Correction de l'exercice 6

- 1) Démontrons que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$. Par ailleurs, I est le milieu de $[AB]$ donc

$$\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}. \text{ Ainsi, } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2.$$

Or, $IA = AB/2$. Donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.

- 2) Appliquons cette formule à un triangle MAB rectangle en M .

Si le triangle MAB rectangle en M , alors $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. Or, d'après ce qui précède, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.

Ainsi, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 0 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4}$. Comme MI et AB désignent des distances, il vient que

$MI = \frac{AB}{2}$. Ainsi, le point M appartient au cercle de centre I et de rayon $\frac{AB}{2}$. Mais puisque I est le milieu de $[AB]$, M appartient finalement au cercle de diamètre l'hypoténuse $[AB]$ du triangle MAB rectangle en M .

- 3) Appliquons la formule à un triangle MAB tel que $MA = 4$, $MB = 6$ et $AB = 7$ afin de calculer la longueur de la médiane issue de M .

En notant I le milieu de $[AB]$, (MI) est la médiane du triangle MAB issue de M . Ainsi, d'après ce qui précède,

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 + \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow MI^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2 - \|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\|^2) + \frac{AB^2}{4}$$

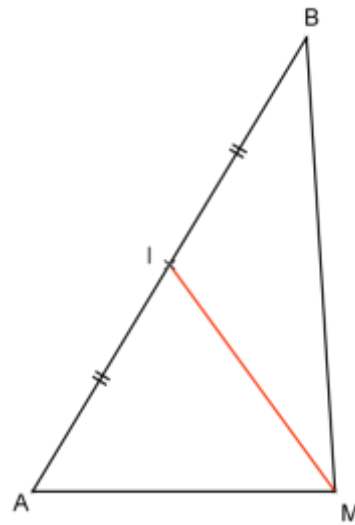
$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2 - \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM}\|^2) + \frac{AB^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2} (MA^2 + MB^2 - AB^2) + \frac{AB^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2} (4^2 + 6^2 - 7^2) + \frac{7^2}{4} \Leftrightarrow MI^2 = \frac{55}{4}$$

Par conséquent, $MI = \sqrt{\frac{55}{4}} = \frac{\sqrt{55}}{2}$.

La médiane du triangle MAB issue de M mesure $\frac{\sqrt{55}}{2}$.



Exercice 7

L'unité choisie est le côté d'un carré du quadrillage. Calculer les produits scalaires suivants :

- 1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- 2) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$
- 3) $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{GF}$
- 4) $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{BD}$
- 5) $\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{DA}$



Correction de l'exercice 7

Rappel : Produit scalaire de vecteurs colinéaires

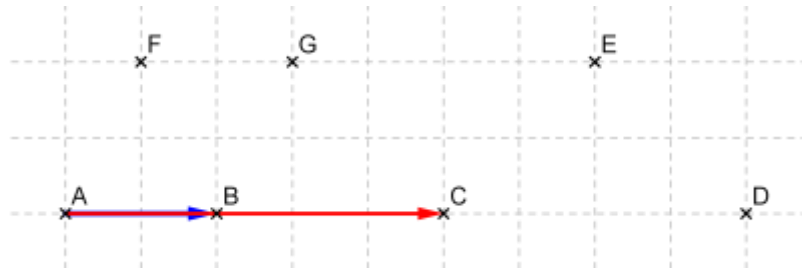
Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires et distincts du vecteur nul.

- si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

1) Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens donc :

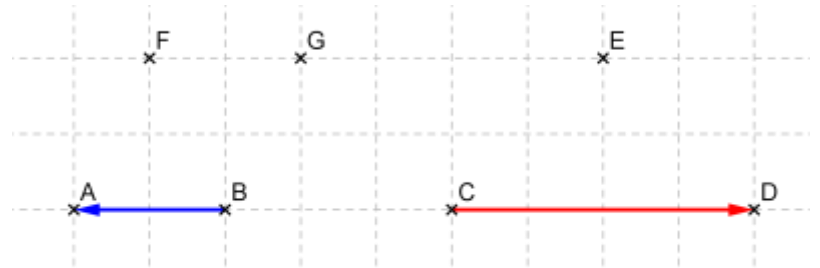
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| = 2 \times 5 = 10$$



2) Calculons $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et de sens contraires donc :

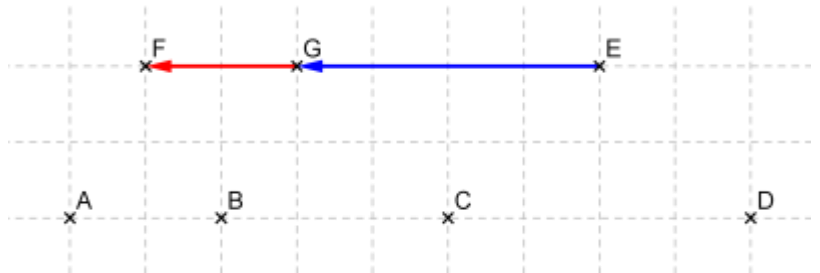
$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = -\|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| = -2 \times 4 = -8$$



3) Calculons $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{GF}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{GF}$ sont colinéaires et de même sens donc :

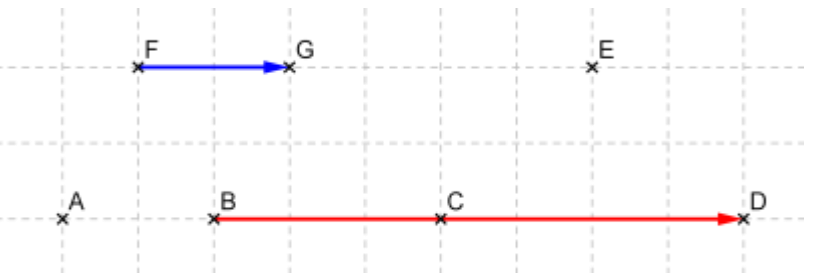
$$\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{GF} = \|\overrightarrow{EG}\| \times \|\overrightarrow{GF}\| = 4 \times 2 = 8$$



4) Calculons $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires et de même sens donc :

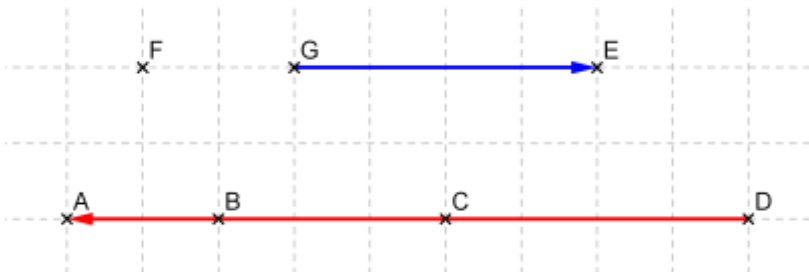
$$\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{BD} = \|\overrightarrow{FG}\| \times \|\overrightarrow{BD}\| = 2 \times 7 = 14$$



5) Calculons $\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{DA}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont colinéaires et de sens contraires donc :

$$\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{DA} = -\|\overrightarrow{GE}\| \times \|\overrightarrow{DA}\| = -4 \times 9 = -36$$



En résumé,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = -8$$

$$\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{GF} = 8$$

$$\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{BD} = 14$$

$$\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{DA} = -36$$

Exercice 8

Soit un carré $ABCD$ de centre O et de côté a . Calculer, en fonction de a , les six produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

3) $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB}$

5) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$

2) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$

4) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO}$

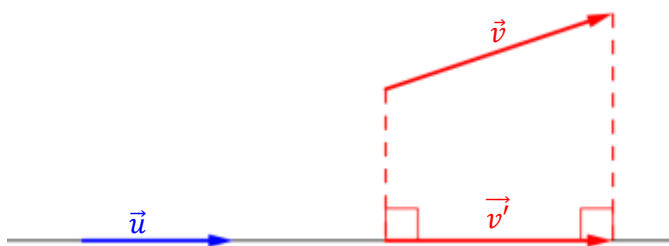
6) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OB}$

Correction de l'exercice 8

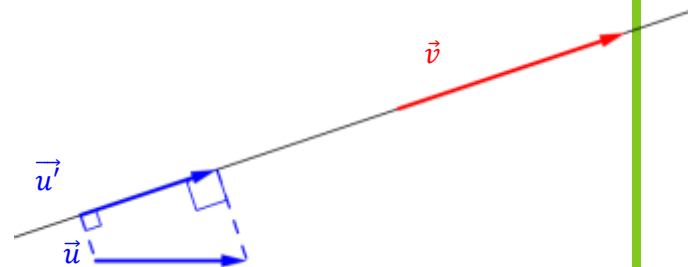
Rappel : Produit scalaire et projection orthogonale de vecteurs

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls. Alors, on a les relations suivantes :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v'}$ où $\vec{v'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur la droite de vecteur directeur $\vec{u}$



- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u'} \cdot \vec{v}$ où $\vec{u'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur la droite de vecteur directeur $\vec{v}$



Par ailleurs, si les vecteurs colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v'}$ sont de même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v'} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v'}\|$ et s'ils sont de sens contraires, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v'} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v'}\|$

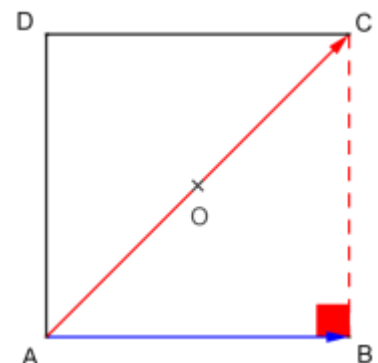
Par ailleurs, si les vecteurs colinéaires $\vec{u'}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u'} \cdot \vec{v} = \|\vec{u'}\| \times \|\vec{v}\|$ et s'ils sont de sens contraires, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u'} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u'}\| \times \|\vec{v}\|$

Remarque importante : On peut donc aussi bien projeter $\vec{v}$ sur la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ que $\vec{v}$ sur la droite de vecteur directeur $\vec{u}$. Seuls l'énoncé et la configuration de la figure tracée permettront de choisir la meilleure de ces deux options.

1) Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'étant pas colinéaires, il convient d'effectuer une projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sur la droite (AB) .

D'une part, $A \in (AB)$ donc A est son propre projeté orthogonal sur (AB) . D'autre part, $ABCD$ est un carré donc B est le projeté orthogonal de C sur (AB) . Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AC}$ sur (AB) .



Par conséquent, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = a^2$

2) Calculons $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$.

$ABCD$ est un carré donc les droites (BC) et (BA) sont perpendiculaires. Il en résulte que les vecteurs directeurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$ respectifs des droites (BC) et (BA) sont orthogonaux. Par conséquent, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$.

3) Calculons $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB}$.

$ABCD$ est un carré de centre O . Or, les diagonales d'un carré sont perpendiculaires, si bien que l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OB}$ est un angle droit. De ce fait, $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.

4) Calculons $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO}$.

O est le centre de $ABCD$ donc O est le milieu des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du carré. Autrement dit, les points A , O et C sont alignés dans cet ordre. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AO}$ sont par conséquent colinéaires et de même sens, d'où :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} = \|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{AO}\| = AC \times AO = AC \times AC/2 = AC^2/2.$$

Or, $ABCD$ est un carré donc BC est rectangle en B . Ainsi, d'après le théorème de Pythagore, on a $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$.

Par conséquent, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} = AC^2/2 = 2a^2/2 = a^2$.

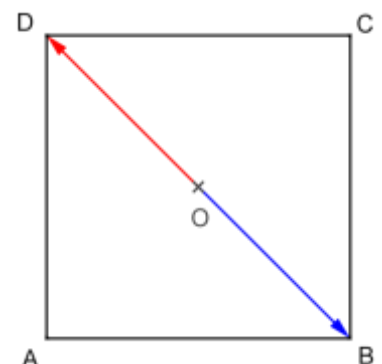
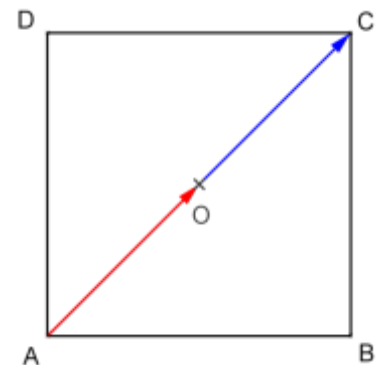
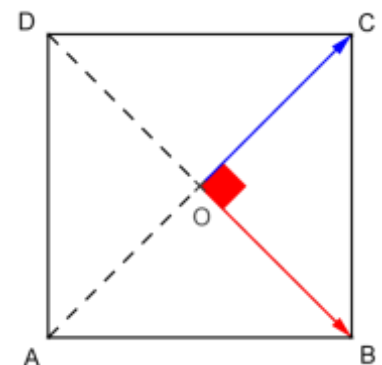
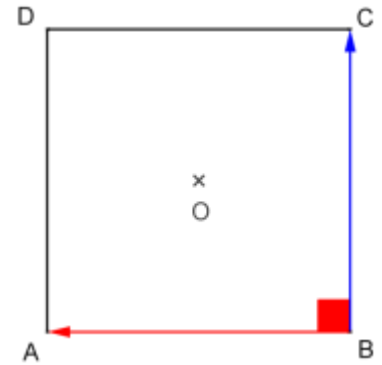
5) Calculons $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$.

O est le milieu de $[BD]$ donc les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires et de sens contraires.

$$\text{Ainsi, } \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = -\|\overrightarrow{OB}\| \times \|\overrightarrow{OD}\| = -BD/2 \times BD/2 = -BD^2/4$$

Or, $ABCD$ est un carré donc ses diagonales sont de même mesure ; d'où $BD = AC$. Ainsi, d'après ce qui précède, $BD^2 = AC^2 = 2a^2$.

Il vient alors que $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = -BD^2/4 = -2a^2/4 = -a^2/2$.



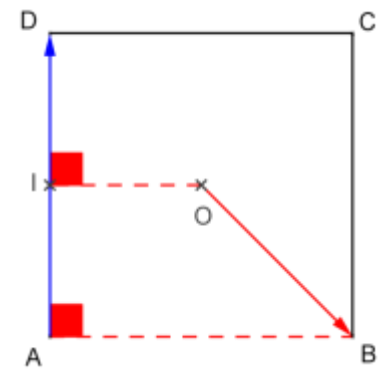
6) Calculons $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OB}$.

Soit I le milieu de AD . Alors I est le projeté orthogonal de O sur (AD) . En outre, A est le projeté orthogonal de B sur (AD) .

Autrement dit, $\overrightarrow{IA}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{OB}$ sur (AD) . D'où $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{IA}$.

Or, les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{IA}$ sont colinéaires et de sens contraires donc $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{IA} = -\|\overrightarrow{AD}\| \times \|\overrightarrow{IA}\| = -AD \times IA = -a \times \frac{a}{2} = -\frac{1}{2}a^2$.

En conclusion, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OB} = -a^2/2$.



Remarque importante : Dans cet exercice, on peut également définir un repère orthonormé du plan, par exemple le repère $(A; \vec{i}; \vec{j})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$. Dès lors, il suffit de noter les coordonnées des points : $(0; 0)$, $B(a; 0)$, $C(a; a)$, $D(0; a)$ et $O(a/2; a/2)$. Ensuite, il convient de déterminer les coordonnées des vecteurs intervenant dans les produits scalaires.

Le repère $(A; \vec{i}; \vec{j})$ est orthonormé car :

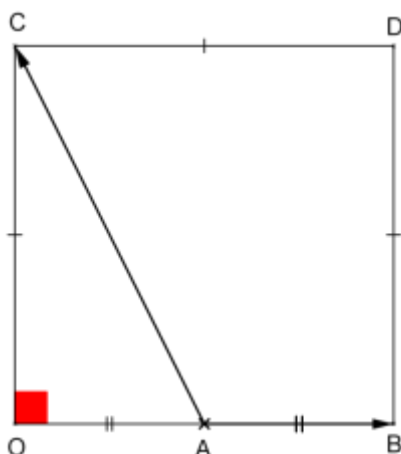
$$\begin{cases} \|\vec{i}\| = \frac{1}{a}\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{a} \times a = 1 \\ \|\vec{j}\| = \frac{1}{a}\|\overrightarrow{AD}\| = \frac{1}{a} \times a = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{a}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{a^2}\underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}_{=0} = 0 \end{cases}$$

Calculons par exemple $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{OB}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -a/2 \\ -a/2 \end{pmatrix}$. Il vient alors que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \times (-a/2) + a \times (-a/2) = -a^2/2$.

Exercice 9

Pour chacune des figures suivantes, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

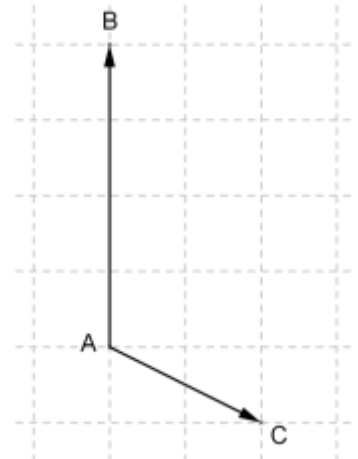
1) $OBDC$ est un carré de côté 5 et A est le milieu de OB .



2) ABC est un triangle isocèle en C , tel que $AB = 4$.



3) L'unité choisie est le côté d'un carré du quadrillage.



Correction de l'exercice 9

1) Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

BDC est un carré donc O est le projeté orthogonal de C sur (OB) . De plus, comme A est le milieu de $[OB]$, $A \in (OB)$. Autrement dit, O est le projeté orthogonal de C sur (AB) .

De plus, $A \in (AB)$ donc A est son propre projeté orthogonal sur (AB) .

Finalement, le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AC}$ sur (AB) est le vecteur $\overrightarrow{AO}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$. Comme A est le milieu de $[OB]$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AO}$ sont colinéaires mais de **sens contraires** et $AB = AO = \frac{OB}{2} = \frac{5}{2}$.

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = -\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AO}\| = -\frac{5}{2} \times \frac{5}{2} = -\frac{25}{4}$.

2) Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Le triangle ABC est isocèle en C donc la droite issue de C et passant par le milieu du segment $[AB]$ est un axe de symétrie du triangle et en particulier une médiatrice. En notant H le milieu de $[AB]$, H est alors le projeté orthogonal de C sur (AB) .

De plus, $A \in (AB)$ donc A est son propre projeté orthogonal sur (AB) .

Finalement, le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AC}$ sur (AB) est le vecteur $\overrightarrow{AH}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$. Comme les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AH}\| = AB \times AH$.

Comme H est le milieu de $[AB]$, alors $AH = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2$. Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = 4 \times 2 = 8$.

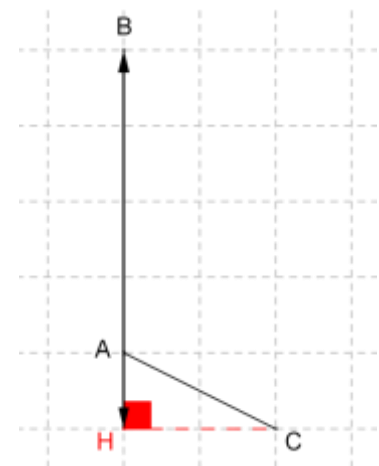
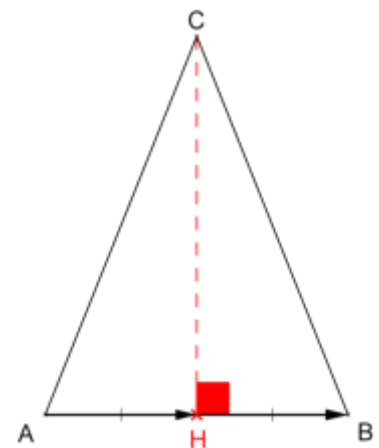
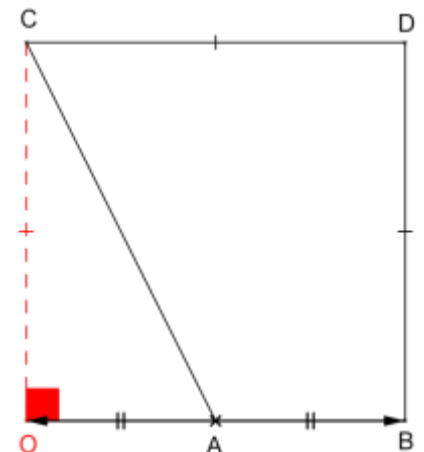
3) Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Afin d'utiliser le quadrillage, la seule projection orthogonale exploitable simplement est la projection orthogonale sur la droite (AB) . Notons alors H le projeté orthogonal de C sur (AB) et remarquons que le projeté orthogonal de A sur (AB) est A lui-même car $A \in (AB)$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$. Comme les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de **sens contraires**, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AH}\|$.

Par ailleurs, $AB = 4$ et $AH = 1$.

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AH}\| = -4 \times 1 = -4$.



Exercice 10

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ distincts du vecteur nul. On note α la mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$.

Illustrer par une figure chacun des cinq cas suivants et calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- | | | | |
|----|-----------------------------|-----------------------------|---------------------------|
| 1) | $\ \vec{u}\ = 5$ | $\ \vec{v}\ = 2$ | $\alpha = \frac{\pi}{4}$ |
| 2) | $\ \vec{u}\ = 3$ | $\ \vec{v}\ = \frac{3}{2}$ | $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ |
| 3) | $\ \vec{u}\ = 4$ | $\ \vec{v}\ = 1$ | $\alpha = \pi$ |
| 4) | $\ \vec{u}\ = \frac{3}{2}$ | $\ \vec{v}\ = \frac{5}{2}$ | $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ |
| 5) | $\ \vec{u}\ = 1$ | $\ \vec{v}\ = 2$ | $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ |

Correction de l'exercice 10

Rappel : Produit scalaire, normes de vecteurs et angle orienté

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$.

Représentons en rouge le vecteur $\vec{u}$, en bleu le vecteur $\vec{v}$ et en vert l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v}) = \alpha$ dans le sens trigonométrique.

$$1) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 5 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2}$$



$$2) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 3 \times \frac{3}{2} \times \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{9}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$



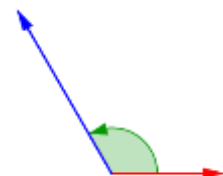
$$3) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 4 \times 1 \times \cos(\pi) = 4 \times (-1)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$$



$$4) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{15}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{8}$$



$$5) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 1 \times 2 \times \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$



Remarque importante :

- Si l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ forme un angle aigu, alors le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est positif. (cas 1 et 2)
- Si l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ forme un angle obtus, alors le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est négatif. (cas 3 et 4)
- Si l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ forme un angle droit, alors le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est nul. (cas 5)

Exercice 11

Soient trois points A , B et C du plan tels que $AB = 4$, $AC = 3$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -10$. Dans chacun des 3 cas suivants, justifier si les affirmations sont vraies ou fausses.

- 1) Les points A , B et C sont alignés.
- 2) $\widehat{BAC} = \pi/7$
- 3) $BC = 2\sqrt{11}$

Correction de l'exercice 11

- 1) Si les points A , B et C sont alignés, alors $|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}| = AB \times AC$.
Or, d'une part $|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}| = |-10| = 10$ et d'autre part $AB \times AC = 4 \times 3 = 12$. En conséquence, $|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}| \neq AB \times AC$. **L'affirmation est fausse.**
- 2) Si $\widehat{BAC} = \pi/7$, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > 0$ puisque $\cos(\frac{\pi}{7}) > 0$.
Or, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -10$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < 0$. **L'affirmation est fausse.**
- 3) Si $BC = 2\sqrt{11}$, alors $BC^2 = (2\sqrt{11})^2 = 2^2 \times \sqrt{11}^2 = 4 \times 11 = 44$.
Or, $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \underbrace{(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2}_{\substack{\text{décomposition} \\ \text{par la relation} \\ \text{de Chasles}}} = \underbrace{\overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}}_{\text{identité remarquable}} = AB^2 + AC^2 \underbrace{- 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}_{\text{linéarité}}$
 $= 4^2 + 3^2 - 2 \times (-10) = 16 + 9 + 20 = 45$. Ainsi, $BC^2 \neq 44$. **L'affirmation est fausse.**

Remarque : Pour infirmer les deux premières affirmations, on pouvait également utiliser directement l'expression $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$. Ainsi, cette expression aurait permis d'établir que :

$$\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{-10}{4 \times 3} = -\frac{5}{6}$$

A l'aide de la calculatrice, $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{5}{6} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \approx 146^\circ$ (arrondi au degré près par défaut).

Exercice 12

Soient les points $A(1; 4)$, $B(-2; -1)$ et $C(3; 1)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Donner la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au dixième.

Correction de l'exercice 12

On sait que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$. D'où la relation :

$$\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$$

- Commençons par calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 1 \\ -1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Il en résulte que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 \times 2 + (-5) \times (-3) = -6 + 15 = 9$.

- Déterminons désormais AB et AC .

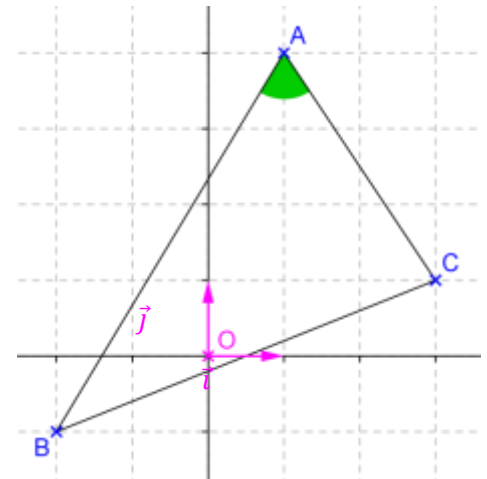
$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

- Calculons maintenant $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

$$\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{9}{\sqrt{34} \times \sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{442}} = \frac{9\sqrt{442}}{442}$$

Dès lors, il résulte que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \approx 64,7^\circ$ (arrondi au dixième de degré par excès). **L'angle $\widehat{BAC}$ mesure $64,7^\circ$ au dixième de degré près.**



Exercice 13

On dit que quatre points A , B , C et D forment un quadrangle orthocentrique si chacun de ces points est l'orthocentre du triangle ayant pour sommets les trois autres points.

Dans un repère orthonormé du plan, on donne les points $A(5; 0)$, $B(-1; -2)$, $C(11; -8)$ et $D(7; 4)$. Ces points forment-ils un quadrangle orthocentrique ?

Correction de l'exercice 13

Pour montrer que les points $A(5; 0)$, $B(-1; -2)$, $C(11; -8)$ et $D(7; 4)$ forment un quadrangle orthocentrique, il faut montrer que :

- 1) A est l'orthocentre du triangle BCD .
- 2) B est l'orthocentre du triangle ACD .
- 3) C est l'orthocentre du triangle ABD .
- 4) D est l'orthocentre du triangle ABC .

Les points sont placés dans un repère orthonormé et nous avons :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

- 1) Commençons par voir si A est l'orthocentre du triangle BCD .

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -6 \times (-4) + (-2) \times 12 = 24 - 24 = 0$ donc $(AB) \perp (CD)$. Autrement dit, le point A appartient à la hauteur de BCD issue de B .

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 6 \times 8 + (-8) \times 6 = 48 - 48 = 0$ donc $(AC) \perp (BD)$. Autrement dit, le point B appartient à la hauteur de BCD issue de C .

Par conséquent, A est le point de concours de deux hauteurs du triangle BCD : A est l'orthocentre de BCD .

- 2) Voyons si B est l'orthocentre du triangle ACD .

D'après ce qui précède, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ donc le point B appartient à la hauteur de ACD issue de A .

D'autre part, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = 12 \times 2 + (-6) \times 4 = 24 - 24 = 0$ donc le point C appartient à la hauteur de ACD issue de B .

Par conséquent, B est le point de concours de deux hauteurs du triangle ACD : B est l'orthocentre de ACD .

- 3) Voyons si C est l'orthocentre du triangle ABD .

Il a été établi plus haut que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ donc le point C appartient à la hauteur de ABD issue de D .

En outre, d'après ce qui précède, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ donc le point C appartient à la hauteur de ABD issue de B .

Comme C est le point de concours de deux hauteurs du triangle ABD , il résulte que C est l'orthocentre de ABD .

- 4) Selon un raisonnement analogue au 3), on montre également que D est l'orthocentre du triangle ABC .

Conclusion : Les points A , B , C et D forment un quadrangle orthocentrique.

Exercice 14

Soit un carré $ABCD$ de côté a , tel que I est le milieu de $[AD]$. Montrer que la mesure de l'angle $\widehat{ACI}$ est indépendante de a .

Correction de l'exercice 14

$ABCD$ est un carré de côté a donc le triangle ABC est rectangle isocèle en B .
D'après le théorème de Pythagore, on a : $CA^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$.

De même, du fait de la nature de $ABCD$, et comme I est le milieu de $[AD]$, le triangle DCI est rectangle en D . Alors, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$CI^2 = CD^2 + DI^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}.$$

Par définition,

$$\vec{CI} \cdot \vec{CA} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{CI}\|^2 + \|\vec{CA}\|^2 - \|\vec{CI} - \vec{CA}\|^2 \right) = \frac{1}{2} \left(CI^2 + CA^2 - \|\vec{CI} + \vec{AC}\|^2 \right) = \frac{1}{2} (CI^2 + CA^2 - AI^2)$$

Or, comme I est le milieu de AD , $AI^2 = \left(\frac{AD}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$. Ainsi, on obtient que :

$$\vec{CI} \cdot \vec{CA} = \frac{1}{2} \left(\frac{5a^2}{4} + 2a^2 - \frac{a^2}{4} \right) = \frac{1}{2} (3a^2) = \frac{3a^2}{2}$$

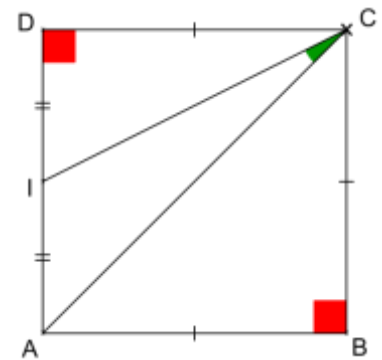
De surcroît,

$$\begin{aligned} \vec{CI} \cdot \vec{CA} &= \|\vec{CI}\| \times \|\vec{CA}\| \times \cos(\vec{CI}; \vec{CA}) = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} \times \sqrt{2a^2} \times \cos(\vec{CI}; \vec{CA}) = \sqrt{\frac{a^2}{4}} \times 2a^2 \times \cos(\vec{CI}; \vec{CA}) \\ &= \sqrt{\frac{a^4}{2}} \times \cos(\vec{CI}; \vec{CA}) = a^2 \sqrt{\frac{1}{2}} \times \cos(\vec{CI}; \vec{CA}) \end{aligned}$$

En résumé, $\vec{CI} \cdot \vec{CA} = \frac{3a^2}{2} = a^2 \sqrt{\frac{1}{2}} \times \cos(\vec{CI}; \vec{CA})$. Il résulte alors de cette dernière égalité que :

$$\cos(\vec{CI}; \vec{CA}) = \frac{\frac{3a^2}{2}}{a^2 \sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}} = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{5}}{2 \times \sqrt{5}^2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Le cosinus de l'angle $(\vec{CI}; \vec{CA})$ est constant donc **la mesure de l'angle $\widehat{ACI}$ est indépendante de la mesure a du côté du carré $ABCD$** . En l'occurrence, l'angle mesure toujours $18,43^\circ$ (arrondi au centième de degré près par défaut).



Exercice 15

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on donne les points $A(-1; 2)$ et $B(3; 4)$. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de $[AB]$.

Correction de l'exercice 15

Rappel : Equation cartésienne de droite

Soit une droite (d) du plan. Il existe 3 réels a , b et c tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ tels que (d) soit l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ qui vérifient l'équation $ax + by + c = 0$. L'équation $ax + by + c = 0$ est appelée équation cartésienne de (d) .

Soit I le milieu de $[AB]$ et soit (d) la médiatrice de $[AB]$. Tout point $M(x; y)$ du plan appartient à (d) si et seulement si les droites (IM) et (AB) sont perpendiculaires. Autrement dit, on a :

$$M(x; y) \in (d) \Leftrightarrow (IM) \perp (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Or, le point I a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$, c'est-à-dire $I(1; 3)$. Il s'ensuit que le vecteur $\overrightarrow{IM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_M - x_I \\ y_M - y_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 3 \end{pmatrix}$. Enfin, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, on a :

$$M(x; y) \in (d) \Leftrightarrow (IM) \perp (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1) \times 4 + (y - 3) \times 2 = 0$$

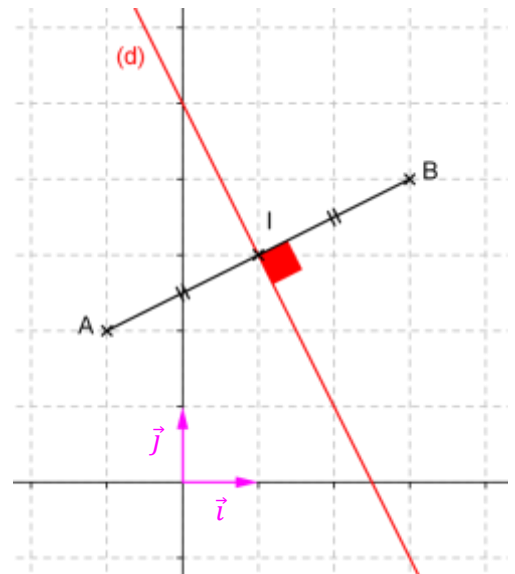
$$\Leftrightarrow 4x - 4 + 2y - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 2y - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(2x + y - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + y - 5 = 0$$

Une équation cartésienne de la médiatrice (d) de $[AB]$ est $2x + y - 5 = 0$.



Exercice 16

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$, sachant que les points A et B ont pour coordonnées respectives $(1; -1)$ et $(3; -2)$.

Correction de l'exercice 16

Tout point $(x; y)$ du plan appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M . Autrement dit, on a :

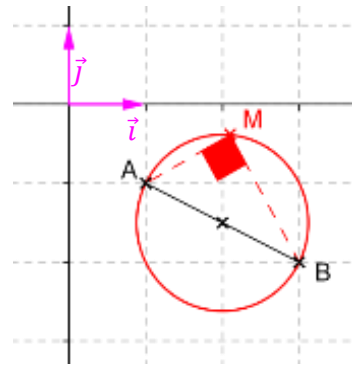
$$(x; y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-3 \\ y+2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) + (y+1)(y+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - x + 3 + y^2 + 2y + y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 + 3y + 5 = 0$$



Une équation du cercle de diamètre $[AB]$ est $x^2 - 4x + y^2 + 3y + 5 = 0$.

Exercice 17

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on donne les points $A(-2; 1)$ et $B(2; 3)$. Déterminer une équation de la tangente au cercle de diamètre $[AB]$ et passant par A .

Correction de l'exercice 17

Soit I le milieu de $[AB]$, soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$ et soit (T) la tangente à $\mathcal{C}$ en A .

Tout point $(x; y)$ du plan appartient à (T) si et seulement si le triangle IAM est rectangle en A , c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

Or, I est le milieu de $[AB]$ donc le point I a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$, c'est-à-dire $I(0; 2)$.

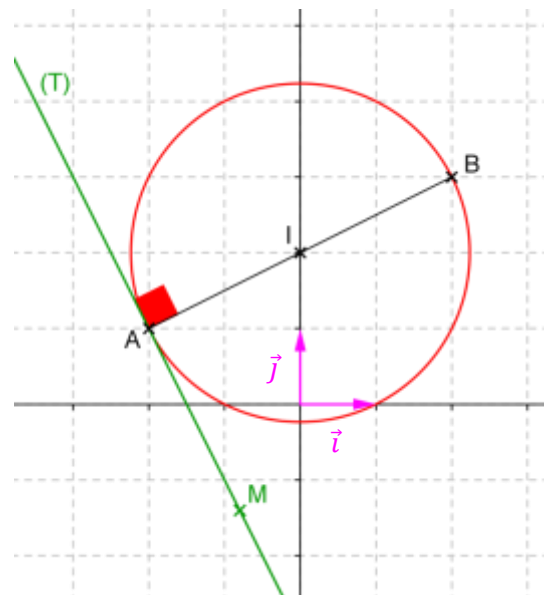
En outre, les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AM}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, on a :

$$(x; y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow 2(x+2) + 1(y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 4 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 3 = 0$$

Une équation cartésienne de la tangente (T) au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ est $2x + y + 3 = 0$.



Exercice 18

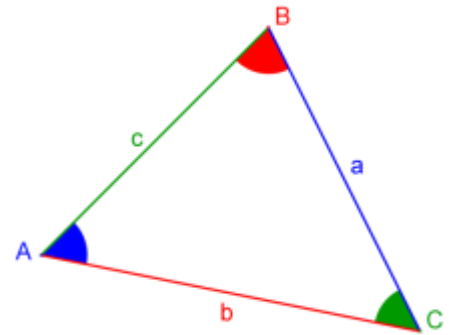
Démontrer que la somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses diagonales.

Correction de l'exercice 18

Rappel : Théorème d'Al-Kashi (également appelé Théorème de Pythagore généralisé)

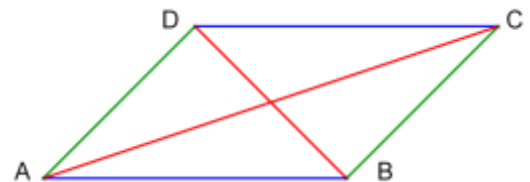
Soit un triangle ABC quelconque. Alors, on a les relations suivantes :

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$



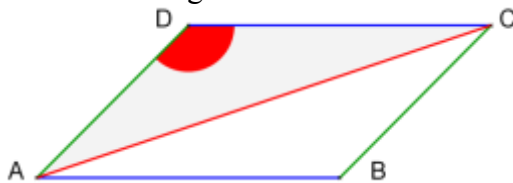
Soit un parallélogramme $ABCD$.

Démontrons que $\underbrace{AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2}_{\text{somme des carrés des côtés du parallélogramme}} = \underbrace{AC^2 + BD^2}_{\text{somme des carrés des diagonales du parallélogramme}}$.



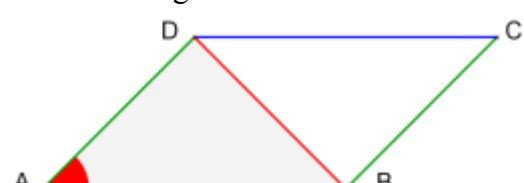
D'après le théorème d'Al-Kashi, on a :

- dans le triangle ADC :



$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \times AD \times DC \times \cos \hat{D}$$

- dans le triangle ABD :



$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2 \times AD \times AB \times \cos \hat{A}$$

En additionnant membre à membre ces égalités, on obtient :

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \times AD \times DC \times \cos \hat{D} + AD^2 + AB^2 - 2 \times AD \times AB \times \cos \hat{A}$$

Or, $ABCD$ est un parallélogramme donc ses côtés opposés sont de même longueur et deux angles consécutifs sont supplémentaires. Autrement dit, on a en particulier les relations suivantes :

- $AD = BC$
- $AB = DC$
- $\hat{A} + \hat{D} = \pi$

$$\text{Ainsi, } AC^2 + BD^2 = AD^2 + DC^2 + BC^2 + AB^2 - 2 \times AD \times DC \times (\cos \hat{D} + \cos(\pi - \hat{D}))$$

$$\text{Or, } \cos(\pi - \hat{D}) = -\cos \hat{D} \text{ donc } \cos \hat{D} + \cos(\pi - \hat{D}) = \cos \hat{D} - \cos \hat{D} = 0.$$

Par conséquent, $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$. Autrement dit, la somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses diagonales.

Exercice 19

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on donne les points $A(3; 1)$ et $B(-1; 3)$. Déterminer une équation cartésienne des tangentes au cercle de diamètre $[AB]$, passant par $C(-2; 5)$.

Correction de l'exercice 19

Notons I le milieu de $[AB]$, $\mathcal{C}$ le cercle de centre I et de diamètre $[AB]$ et (t) la tangente à $\mathcal{C}$ en $H(x; y)$, passant par $C(-2; 5)$.

(t) est la tangente à $\mathcal{C}$ en H , passant par C donc H est le point d'intersection de (t) et $\mathcal{C}$. Par conséquent, les droites (CH) et (IH) sont orthogonales et IH est un rayon du cercle $\mathcal{C}$. Autrement dit, H est le point d'intersection de (t) et $\mathcal{C}$ si et seulement si $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{IH} = 0$ et $HI = AI$.

I le milieu de $[AB]$ donc I a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$, c'est-à-dire $I(1; 2)$.

$$\text{D'une part, } \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{IH} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+2 \\ y-5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) + (y-5)(y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 2x - 2 + y^2 - 2y - 5y + 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + y^2 - 7y + 8 = 0$$

$$\text{D'autre part, } HI = AI \Leftrightarrow HI^2 = AI^2 \Leftrightarrow (x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = (x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (3 - 1)^2 + (1 - 2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 2^2 + (-1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$$

H est le point d'intersection de (t) et $\mathcal{C}$ donc ses coordonnées vérifient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x^2 + x + y^2 - 7y + 8 = 0 \text{ (L1)} \\ x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0 \text{ (L2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0 \text{ (L2} \rightarrow \text{L1)} \\ 3x - 7y + 4y + 8 = 0 \text{ (L1} - \text{L2} \rightarrow \text{L2)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0 \text{ (L1)} \\ 3x - 3y + 8 = 0 \text{ (L2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0 \text{ (L1)} \\ x = \frac{3y - 8}{3} \text{ (L2)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - \frac{8}{3} \text{ (L2} \rightarrow \text{L1)} \\ \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 - 2 \times \left(y - \frac{8}{3}\right) + y^2 - 4y = 0 \text{ (L1} \rightarrow \text{L2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - \frac{8}{3} \text{ (L1)} \\ y^2 - \frac{16}{3}y + \frac{64}{9} - 2y + \frac{16}{3} + y^2 - 4y = 0 \text{ (L2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - \frac{8}{3} \quad (L1) \\ 9y^2 - 48y + 64 - 18y + 48 + 9y^2 - 36y = 0 \quad (9 \times L2 \rightarrow L2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - \frac{8}{3} \quad (L1) \\ 18y^2 - 102y + 112 = 0 \quad (L2) \end{cases} \quad \begin{cases} x = y - \frac{8}{3} \quad (L1) \\ 9y^2 - 51y + 56 = 0 \quad (L2/2 \rightarrow L2) \end{cases}$$

Soit Δ le discriminant du trinôme $9y^2 - 51y + 56$ du second degré d'inconnue y .

$$\Delta = (-51)^2 - 4 \times 9 \times 56 = 585 = 9 \times 65$$

$\Delta > 0$ donc le trinôme $9y^2 - 51y + 56$ admet deux racines réelles distinctes y_1 et y_2 .

$$y_1 = \frac{-(-51) - \sqrt{9 \times 65}}{2 \times 9} = \frac{51 - 3\sqrt{65}}{18} = \frac{17 - \sqrt{65}}{6}$$

$$y_2 = \frac{-(-51) + \sqrt{9 \times 65}}{2 \times 9} = \frac{51 + 3\sqrt{65}}{18} = \frac{17 + \sqrt{65}}{6}$$

$$\begin{cases} x = y - \frac{8}{3} \quad (L1) \\ 9y^2 - 51y + 56 = 0 \quad (L2/2 \rightarrow L2) \end{cases} \quad \begin{cases} x = y - \frac{8}{3} \quad (L1) \\ y_1 = \frac{17 - \sqrt{65}}{6} \text{ ou } y_2 = \frac{17 + \sqrt{65}}{6} \quad (L2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - \frac{8}{3} \quad (L1) \\ y_1 = \frac{17 - \sqrt{65}}{6} \text{ ou } y_2 = \frac{17 + \sqrt{65}}{6} \quad (L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{17 - \sqrt{65}}{6} \text{ ou } y_2 = \frac{17 + \sqrt{65}}{6} \\ x_1 = y_1 - \frac{8}{3} \text{ ou } x_2 = y_2 - \frac{8}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{17 - \sqrt{65}}{6} \\ x_1 = \frac{17 - \sqrt{65}}{6} - \frac{8}{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y_2 = \frac{17 + \sqrt{65}}{6} \\ x_2 = \frac{17 + \sqrt{65}}{6} - \frac{8}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = \frac{17 - \sqrt{65}}{6} \\ x_1 = \frac{17 - \sqrt{65}}{6} - \frac{16}{6} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y_2 = \frac{17 + \sqrt{65}}{6} \\ x_2 = \frac{17 + \sqrt{65}}{6} - \frac{16}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{17 - \sqrt{65}}{6} \\ x_1 = \frac{1 - \sqrt{65}}{6} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y_2 = \frac{17 + \sqrt{65}}{6} \\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{65}}{6} \end{cases}$$

Il existe donc deux points H_1 et H_2 d'intersection de (t) et $\mathcal{C}$, de coordonnées respectives :

$$\left(\frac{1 - \sqrt{65}}{6} ; \frac{17 - \sqrt{65}}{6} \right) \text{ et } \left(\frac{1 + \sqrt{65}}{6} ; \frac{17 + \sqrt{65}}{6} \right)$$

Déterminons désormais une équation cartésienne de chacune des tangentes (t_1) et (t_2) passant respectivement par H_1 et H_2 .

$M(x_M ; y_M) \in (t_1)$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CH_1}$ sont colinéaires et $M(x_M ; y_M) \in (t_2)$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CH_2}$ sont colinéaires.

Rappel : Vecteurs colinéaires

Dans un repère, deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ non nuls sont colinéaires si, et seulement si, $xy' - x'y = 0$.

L'expression $xy' - x'y$ est le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$.

- Les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CH_1}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x_M + 2 \\ y_M - 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{65}}{6} + 2 \\ \frac{17-\sqrt{65}}{6} - 5 \end{pmatrix}$.

$M(x_M; y_M) \in (t_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CH_1}$ colinéaires

$$\Leftrightarrow (x_M + 2) \left(\frac{17 - \sqrt{65}}{6} - 5 \right) - (y_M - 5) \left(\frac{1 - \sqrt{65}}{6} + 2 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{17 - \sqrt{65}}{6} - 5 \right) x_M + \frac{17 - \sqrt{65}}{3} - 10 - \left(\frac{1 - \sqrt{65}}{6} + 2 \right) y_M + \frac{5 - 5\sqrt{65}}{6} + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-13 - \sqrt{65}}{6} x_M + \frac{-13 + \sqrt{65}}{6} y_M + \frac{34 - 2\sqrt{65}}{6} + \frac{5 - 5\sqrt{65}}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-13 - \sqrt{65}}{6} x_M + \frac{-13 + \sqrt{65}}{6} y_M + \frac{39 - 7\sqrt{65}}{6} = 0$$

- Les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CH_2}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x_M + 2 \\ y_M - 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{65}}{6} + 2 \\ \frac{17+\sqrt{65}}{6} - 5 \end{pmatrix}$.

$M(x_M; y_M) \in (t_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CH_2}$ colinéaires

$$\Leftrightarrow (x_M + 2) \left(\frac{17 + \sqrt{65}}{6} - 5 \right) - (y_M - 5) \left(\frac{1 + \sqrt{65}}{6} + 2 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{17 + \sqrt{65}}{6} - 5 \right) x_M + \frac{17 + \sqrt{65}}{3} - 10 - \left(\frac{1 + \sqrt{65}}{6} + 2 \right) y_M + \frac{5 + 5\sqrt{65}}{6} + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-13 + \sqrt{65}}{6} x_M + \frac{-13 - \sqrt{65}}{6} y_M + \frac{34 + 2\sqrt{65}}{6} + \frac{5 + 5\sqrt{65}}{6} = 0$$

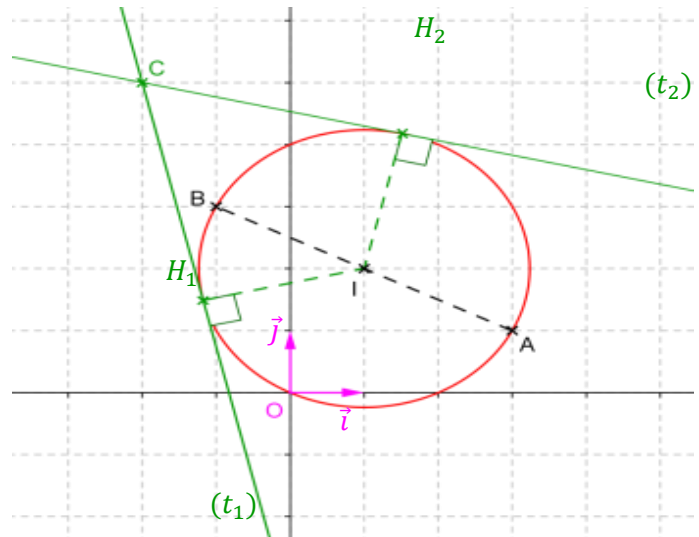
$$\Leftrightarrow \frac{-13 + \sqrt{65}}{6} x_M + \frac{-13 - \sqrt{65}}{6} y_M + \frac{39 + 7\sqrt{65}}{6} = 0$$

En conclusion, les tangentes (t_1) et (t_2) au cercle C passant par C ont pour équations cartésiennes respectives :

$$\frac{-13 - \sqrt{65}}{6}x + \frac{-13 + \sqrt{65}}{6}y + \frac{39 - 7\sqrt{65}}{6} = 0$$

et

$$\frac{-13 + \sqrt{65}}{6}x + \frac{-13 - \sqrt{65}}{6}y + \frac{39 + 7\sqrt{65}}{6} = 0$$



Exercice 20

Soit un triangle ABC . On note O le centre du cercle circonscrit à ce triangle, H le point du plan défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et G le point du plan tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

- 1) Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC .
- 2) Démontrer que G est le centre de gravité du triangle ABC .
- 3) Démontrer que les points O , H et G sont alignés.

Correction de l'exercice 20

- 1) Démontrons que H est l'orthocentre du triangle ABC .

Pour montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC , commençons par montrer que H appartient à la hauteur du triangle ABC , issue de A , autrement dit commençons par montrer que $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} &= \left(\underbrace{\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH}}_{\text{cf 1}} \right) \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AO} + \underbrace{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}_{\text{cf 2}} \right) \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\underbrace{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}_{\text{cf 3}} \right) \cdot \left(\underbrace{\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}}_{\text{cf 1}} \right) \\ &= \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \right) \cdot \left(\underbrace{-\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}_{\text{cf 4}} \right) = \left(\underbrace{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}}_{\text{cf 5}} \right) \cdot \left(\underbrace{\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}}_{\text{cf 5}} \right) = \underbrace{\overrightarrow{OC}^2 - \overrightarrow{OB}^2}_{\text{cf 6}} = C^2 - B^2 = \underbrace{0}_{\text{cf 7}} \end{aligned}$$

Explications :

- 1- On utilise la relation de Chasles en introduisant le point O .
- 2- On utilise l'égalité de l'énoncé définissant le point H , à savoir $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
- 3- La somme de vecteurs opposés est égale au vecteur nul ; ici, $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} = \vec{0}$.

- 4- On met en évidence l'opposée du vecteur opposé ; ici, $\overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{OB}$.
- 5- On permute les vecteurs pour mettre en évidence le produit scalaire $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.
- 6- On applique l'identité remarquable $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.
- 7- O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC donc $OA = OB = OC$. D'où $OA^2 = OB^2 = OC^2$.

$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ donc H appartient à la hauteur du triangle ABC , issue de A .

Par un raisonnement analogue, on montre que H appartient à la hauteur du triangle ABC , issue de B . En effet :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} &= \left(\underbrace{\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OH}}_{\text{cf 1}} \right) \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{BO} + \underbrace{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}_{\text{cf 2}} \right) \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\underbrace{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}_{\text{cf 3}} \right) \cdot \left(\underbrace{\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}}_{\text{cf 1}} \right) \\ &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \cdot \left(\underbrace{-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}_{\text{cf 4}} \right) = \left(\underbrace{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}}_{\text{cf 5}} \right) \cdot \left(\underbrace{\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}}_{\text{cf 5}} \right) = \underbrace{\overrightarrow{OC}^2 - \overrightarrow{OA}^2}_{\text{cf 6}} = OC^2 - OA^2 = \underbrace{0}_{\text{cf 7}} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ donc H appartient à la hauteur du triangle ABC , issue de B .

Par conséquent, H est le point de concours de deux hauteurs du triangle ABC : H est l'orthocentre de ABC .

2) Démontrons que G est le centre de gravité du triangle ABC .

Pour montrer que G est le centre de gravité du triangle ABC , commençons par montrer que G appartient à la médiane du triangle ABC , issue de A .

Notons A' , B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \underbrace{\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'C}}_{\text{cf 1}} = 3\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A} + \underbrace{\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}}_{\text{cf 2}} = 3\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A}$$

Explications :

- 1- On utilise la relation de Chasles en introduisant le milieu A' de $[BC]$.
- 2- A' est le milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \vec{0}$.

Or, par définition du point G , $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ donc $3\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A} = \vec{0}$. Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{GA'}$ et $\overrightarrow{A'A}$ sont colinéaires : les points G , A' et A sont alignés. Comme $(A'A)$ désigne la médiane du triangle ABC , issue de A , on en déduit que $G \in (A'A)$.

Par un raisonnement analogue, on montre que G appartient à la médiane du triangle ABC , issue de B . En effet :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \underbrace{\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'C}}_{\text{cf 1}} = 3\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'B} + \underbrace{\overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'C}}_{\text{cf 2}} = 3\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'B}$$

Explications :

- 1- On utilise la relation de Chasles en introduisant le milieu B' de $[AC]$.
- 2- B' est le milieu de $[AC]$ donc $\overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'C} = \vec{0}$.

Comme, par définition du point G , $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, il vient que $3\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'B}$. Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{GB'}$ et $\overrightarrow{B'B}$ sont colinéaires : les points G , B' et B sont alignés. Comme $(B'B)$ désigne la médiane du triangle ABC , issue de B , on en déduit que $G \in (B'B)$.

Par conséquent, G appartient à deux médianes du triangle ABC : G est le centre de gravité de ABC .

3) Démontrer que les points O , H et G sont alignés.

Par définition, $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{OG} \text{ car } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Ainsi, la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OG}$ prouve l'alignement des points O , H et G . Autrement dit, **dans un triangle, l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont 3 points alignés** (voire confondus dans certains cas particuliers).

Remarque : Ces 3 points appartiennent à une même droite, appelée « droite d'Euler ».

Exercice 21

A et B sont deux points du plan tels que $AB = 4$. (d) désigne une droite ne passant ni par A , ni par B . M est un point libre de (d) . Déterminer la position du point M de sorte que $MA^2 + MB^2$ soit minimale.

Correction de l'exercice 21

Soit I le milieu de $[AB]$.

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 \\ &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= \left(\overrightarrow{MI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2 \\ &= \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2 \\ &= 2\overrightarrow{MI}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2} \times 4^2 \\ &= MI^2 + 8 \end{aligned}$$

$MA^2 + MB^2$ est donc minimale quand MI^2 est minimale, c'est-à-dire quand (MI) et (d) sont perpendiculaires.

