

Systèmes mécaniques oscillants : exercices

Exercice 1 :

1. Définir les notions suivantes :

Oscillateur mécanique - mouvement oscillatoire - oscillation libre - amplitude de mouvement - élongation du mouvement - période propre - amortissement des oscillations mécaniques - oscillations forcées - oscillations entretenues - pendule élastique - pendule pesant - pendule simple - pendule de torsion .

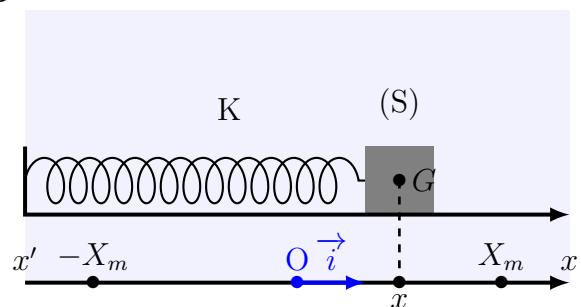
2. Choisir la bonne réponse :

- (a) Plus la raideur d'un ressort est grande , plus la période du pendule élastique horizontal est :
(a) grande (b) petite
- (b) La formule de la période des oscillations du pendule élastique horizontal n'est valable que pour des petites élongations :
(a) vrai (b) faux
- (c) En présence de frottements , l'amplitude d'un pendule de torsion :
(a) croît (b) décroît (c) reste constante
- (d) Plus la longueur du fil d'un pendule simple est grande , plus sa période est :
(a) courte (b) longue
- (e) Plus la constante de torsion est grande , plus la période du pendule de torsion est :
(a) grande (b) petite

Pendule élastique

Exercice 2 : résolution analytique de E.D

Un oscillateur mécanique élastique est constitué d'un ressort de constante de raideur $K = 10\text{N/m}$ associé à un solide de masse $m = 250\text{g}$. On écarte le système de sa position d'équilibre de 2cm et on l'abandonne sans vitesse initiale.



On considère un axe $(O, \vec{i})$, avec O coïncide avec la position du centre d'inertie G du solide à l'équilibre et le vecteur unitaire $\vec{i}$ parallèle au déplacement du solide. On repère la position G du solide à chaque instant par l'élongation $OG = x(t)$.

1. Montrer que le mouvement du centre d'inertie G du solide obéit, en absence de frottement , à l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

2. La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = X_m \cos \left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi \right)$$

- Déterminer l'expression de la période propre T_0 des oscillations du pendule élastique et calculer sa valeur .
- Déterminer les paramètres X_m et φ , sachant qu' à l'instant $t=0$, G passe par la position d'équilibre du pendule dans le sens positif .Écrire cette solution.
- Déterminer la vitesse des oscillation à l'instant t , en déduire la vitesse maximale du système en précisant sa positions .
- Déterminer les caractéristiques de la force $\vec{F}$ exercée par le ressort sur le solide dans les deux cas suivant :
 - * lorsque le solide passe par sa position d'équilibre stable ;
 - * lorsque $x = X_m$ et $x = -X_m$

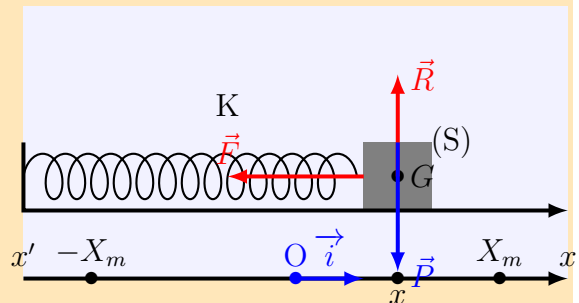
Solution : exercice 2

1. Établissement de l'équation différentielle du mouvement :

Référentiel lié au laboratoire considéré comme Galiléen ;

Système étudié : le solide (S) ;

Bilan des forces exercées sur le système : le poids $\vec{P}$, la réaction du plan horizontal $\vec{R}$ et la tension du ressort $\vec{F} = -K \cdot \Delta l$;



On applique la deuxième loi de Newton sur (S) :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$$

On projette la relation sur $x'Ox$:

$$0 + 0 - K \cdot \Delta l = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$

d'où

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{K}{m} \cdot x = 0}$$

2. La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = X_m \cos \left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi \right)$$

2.1 L'expression de la période propre T_0 des oscillations du pendule élastique :

$x(t)$ solution de l'équation différentielle , donc elle la vérifie , i.e on dérive deux fois $x(t)$ par rapport au temps :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T_0^2} X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{4\pi^2}{T_0^2} x(t)$$

Pour que $x(t)$ soit solution de l'E.D il suffit que

$$\frac{K}{m} = \frac{4\pi^2}{T_0^2}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

Application numérique : $T_0 \approx 1s$

2.2 On détermine les paramètres X_m et φ , sachant qu'à l'instant $t=0$, G passe par la position d'équilibre du pendule dans le sens positif :

D'après les données de l'exercice on $X_m = 2.10^{-2}m$

En considérant les conditions initiales suivantes : à $t = 0$ on a $x(0) = 0$ passe par la position d'équilibre et $v(0) > 0$;

$$X_m \cos\varphi = 0 \text{ donc } \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

et puisque la vitesse à $t=0$ est positive : $-X_m \frac{2\pi}{T_0} \sin(\varphi) > 0$ c'est à dire que $\sin\varphi < 0$, d'où

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

donc la solution de E.D est :

$$x(t) = 2 \times 10^{-2} \cos\left(2\pi.t - \frac{\pi}{2}\right)$$

2.3 La vitesse des oscillation à l'instant t , en déduire la vitesse maximale du système en précisant sa positions :

$$\text{La vitesse des oscillations : } v(t) = -4 \times 10^{-2} \pi \sin\left(2\pi.t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Cette vitesse est maximale lorsque $\sin\left(2\pi.t - \frac{\pi}{2}\right) = -1$ i.e que $v_{max} = 4 \times 10^{-2} \pi$

2.4 Les caractéristiques de la force $\vec{F}$ exercée par le ressort sur le solide dans les deux cas suivant :

L'intensité de la force : Est une force de rappel qui s'oppose au sens d'allongement $F(t) = K.x(t)$

* lorsque le solide passe par sa position d'équilibre stable ;

nous avons $x(t) = 0$ donc $F(t) = 0$

* lorsque $x = X_m$ et $x = -X_m$

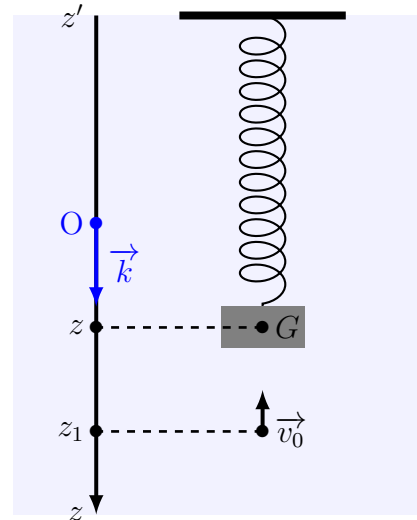
Pour $x = X_m$ nous avons $\vec{F} = K.X_m \vec{i}$ l'intensité de la force est maximale et dans le même sens que $\vec{i}$.

Pour $x = -X_m$ nous avons $\vec{F} = -K.X_m \vec{i}$ l'intensité est maximale et dans le sens opposé de $\vec{i}$

Exercice 3 : Pendule élastique vertical

Un pendule élastique vertical est constitué d'un ressort de constante de raideur $K = 10\text{N/m}$ associé à un solide de masse $m = 300\text{g}$. On écarte le système de sa position d'équilibre de $z_1 = 2\text{cm}$ et à l'instant $t=0$ (origine des dates) on l'abandonne avec une vitesse initiale $v_0 = 0.3\text{m/s}$ dans le sens négatif de l'axe $(O, \vec{k})$ orienté vers le bas et avec O coïncide avec la position du centre d'inertie G du solide à l'équilibre stable et le vecteur unitaire $\vec{k}$ parallèle au déplacement du solide.

On repère la position G du solide à chaque instant par l'élongation $OG = z(t)$.



1. Montrer que le mouvement du centre d'inertie G du solide obéit, en absence de frottement, à l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{z} + \frac{K}{m}.z = 0$$

2. La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = Z_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0 t} + \varphi\right)$$

- (a) Déterminer l'expression de la période propre T_0 des oscillations du pendule élastique et calculer sa valeur .
 - (b) Déterminer les paramètres Z_m et φ .
3. Étudions le cas où on lance le système à $t=0$, à partir de l'état d'équilibre stable, dans le sens positive avec une vitesse $v_0 = 0,3\text{m/s}$. Déterminer les paramètres Z_m et φ .

Solution : exercice 3

1. Établissement de l'équation différentielle du mouvement :

Référentiel lié au laboratoire considéré comme Galiléen ;

Système étudié : le solide (S) ;

Bilan des forces exercées sur le système : le poids $\vec{P}$ et la tension du ressort $\vec{F} = -K.\Delta\vec{l}$;

Étude du système à l'état d'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{F} = -K.\Delta\vec{l}_0 = \vec{0}$$

On projette sur $z'Oz$, on aura :

$$m.g - K.\Delta l_0 = 0 \quad (1)$$

À l'instant t on applique la deuxième loi de Newton :

$$\vec{P} + \vec{F} = m.\vec{a}_z$$

$$mg - K.\Delta l = m.\frac{d^2z}{dt^2}$$

avec $\Delta l = \Delta l_0 + x$ Donc :

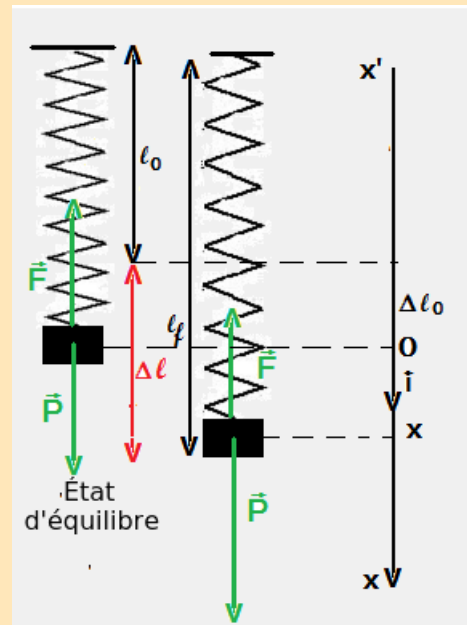
$$mg - K.\Delta l_0 - K.z = m.\frac{d^2z}{dt^2}$$

et d'après l'état d'équilibre on a $m.g - K.\Delta l_0 = 0$, I.e que E.D sera :

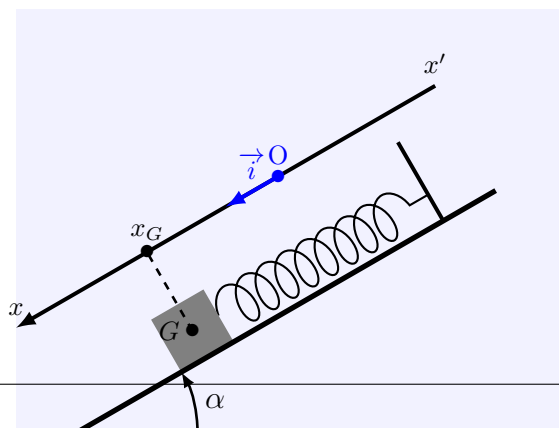
$$-K.x = m.\frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{K}{m}.z = 0$$

2.

**Exercice 4 : Pendule élastique incliné**

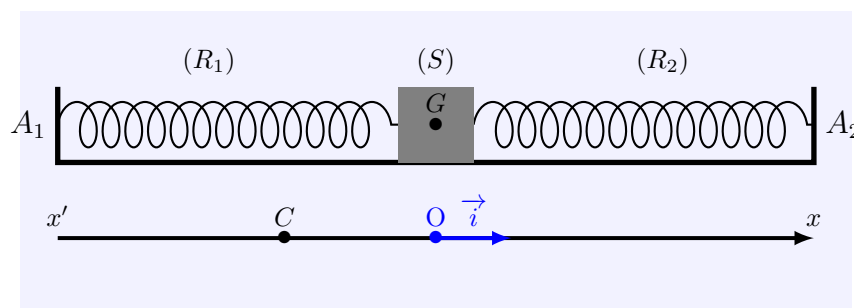
Un ressort de masse négligeable, à spires non jointives, parfaitement élastique n est accroché par l'une des extrémités à un support fixe et l'autre extrémité, on accroche un solide de masse $m = 500g$. L'ensemble est situé sur la ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant un angle $\alpha = 30^\circ$ avec l'horizontale. Les frottements sont négligés dans tout l'exercice.



1. Le ressort de longueur $l_0 = 20\text{cm}$ au repos, à l'équilibre la longueur du ressort est $l = 25\text{cm}$. En déduire la valeur de la constante de raideur K du ressort. On prend $g = 10\text{m/s}^2$
2. On écarte le solide vers le bas, de sa position d'équilibre à $t=0$ d'une distance de $d = 3\text{cm}$ et on le lâche sans vitesse initiale. Par une étude dynamique trouver l'équation horaire du mouvement.
3. La période des oscillations dépend-elle de l'angle α ?

Exercice 5 : Association de deux ressorts

On place un cavalier de masse $M = 700\text{g}$ sur un rail à coussin d'air horizontal et on le fixe aux extrémités de deux ressorts semblables R_1 et R_2 de mêmes constantes de raideur $K_1 = K_2 = 20\text{N/m}$. La longueur initiale de chaque ressort est $l_{01} = l_{02} = 18\text{cm}$ et à l'équilibre, ils ont même allongement $\Delta l_1 = \Delta l_2 = 2\text{cm}$.



1. On écarte le cavalier de sa position d'équilibre de distance $OC = 2\text{cm}$ de sens vers A_1 et de direction de A_1A_2 , puis on l'abandonne sans vitesse initiale, à l'instant $t=0$.
 - (a) Déterminer, à un instant t , les expressions des allongements de Δl_1 et Δl_2 pour chaque ressort en fonction de x l'abscisse de G .
 - (b) Déterminer l'équation différentielle du mouvement de G .
 - (c) La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme suivante :

$$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

avec ω_0 est la pulsation propre du mouvement de G , $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$. Donner l'expression de ω_0 et T_0 . Déterminer φ et X_m

2. On fixe au cavalier une petite plaque de masse négligeable puis on l'immerge dans un liquide. Sachant que la force de frottement appliquée par le liquide sur la plaque au cours du mouvement du cavalier est de la forme $\vec{f} = -\alpha \cdot \vec{v}$ où α est une constante positive et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de G . Montrer que l'équation différentielle du mouvement de G peut s'écrire sous la forme suivante :

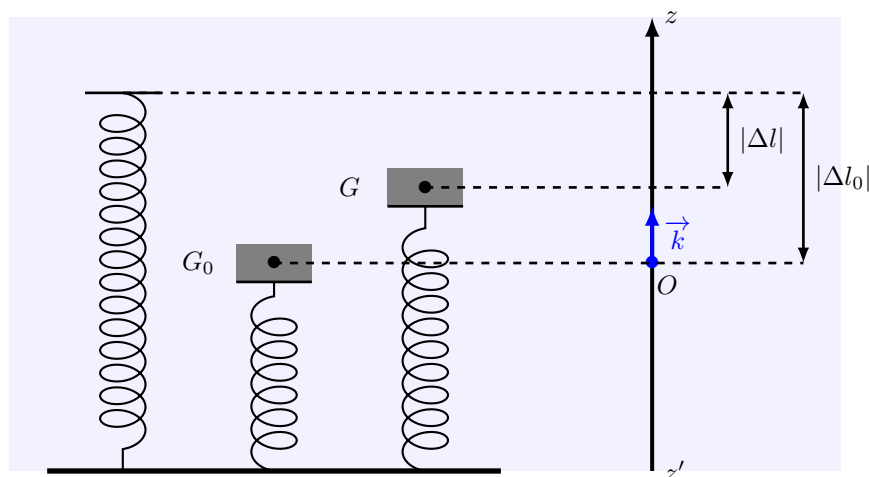
$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{2K}{m} x = 0$$

3. Donner la forme des courbes qui représentent l'élongation $x(t)$ du centre d'inertie G lorsque les frottements deviennent de plus en plus importants. (on prend les mêmes conditions initiales)

Exercice 6 :La suspension : les amortisseurs

La suspension d'une automobile se compose , au niveau de chaque roue , d'un ressort et d'un amortisseur (généralement à l'huile)

On modélise l'automobile par un solide de masse M de centre d'inertie G ; les ressorts par un seul ressort vertical , à spire non jointive, de masse négligeable et d'une constante de raideur K . Le système (ressort+solide) est représenté dans la figure ci-dessous :



Le repérage des positions z du centre d'inertie G du solide se fait selon un axe Oz orienté vers le haut ; l'origine O est choisie à la position d'équilibre G_0 du centre d'inertie du solide .

I. Étude du système à l'état d'équilibre .

Pour la vérification de la valeur de la constante de raideur de ressort , on mesure la longueur initiale du ressort l_0 , puis on place le solide (S) de masse $M = 100g$ sur le plateau de masse négligeable, fixé à l'extrémité libre du ressort . Ce dernier sera comprimé de Δl_0 et sa longueur finale à l'équilibre $l = 7,6cm$.

1. Calculer la constante de raideur K du ressort .
2. Calculer l'erreur relative qui peut se commettre au cours de cette mesure par l'opérateur sur la constante de raideur du ressort . la valeur de K indiquée par le fabricant est $K = 40N/m$. On donne la formule de l'erreur relative :

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{X_{ex} - X_{th}}{X_{th}}$$

II. Étude dynamique :

On écarte le système (ressort + solide) de sa position d'équilibre vers le bas de $2cm$ et on l'abandonne sans vitesse initiale . Le système effectue un mouvement oscillatoire autour de sa position d'équilibre G_0 .

1. En appliquant la deuxième loi de Newton , montrer que l'équation différentielle du mouvement de G est :

$$\ddot{z} + \frac{K}{M}z = 0$$

2. Écrire la solution $z(t)$ de cette équation différentielle en fonction de f_0 la fréquence propre des oscillations , z_m et le temps t . En déduire l'expression de la vitesse $v(t)$

3. En utilisant les expressions de $v(t)$ et $z(t)$, montrer que :

$$v = 2\pi f_0 \sqrt{z_m^2 - z^2}$$

$$\tan \Phi = -\frac{v}{2\pi f_0 z}$$

avec Φ est le déphasage de $z(t)$ à l'instant t .

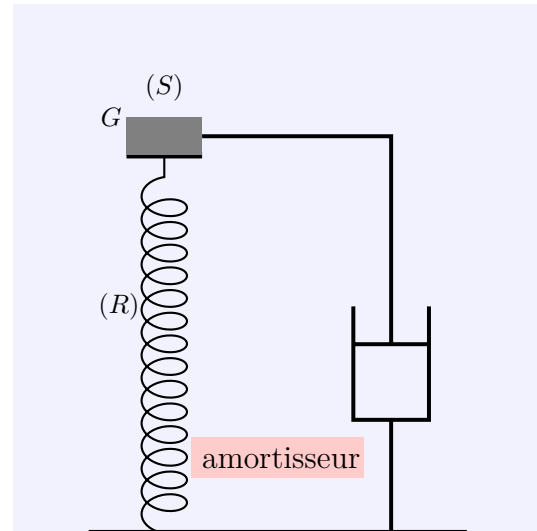
4. Calculer v la vitesse de G et Φ la phase du mouvement à l'instant $t = 2s$

II. Étude des oscillations forcées

Pour modéliser l'amortissement, on ajoute au dispositif précédent un amortisseur qui engendre une force de frottement fluide de sens opposé au vecteur vitesse du mouvement de G et proportionnelle à sa valeur tel que :

$$\vec{f} = -\alpha \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}$$

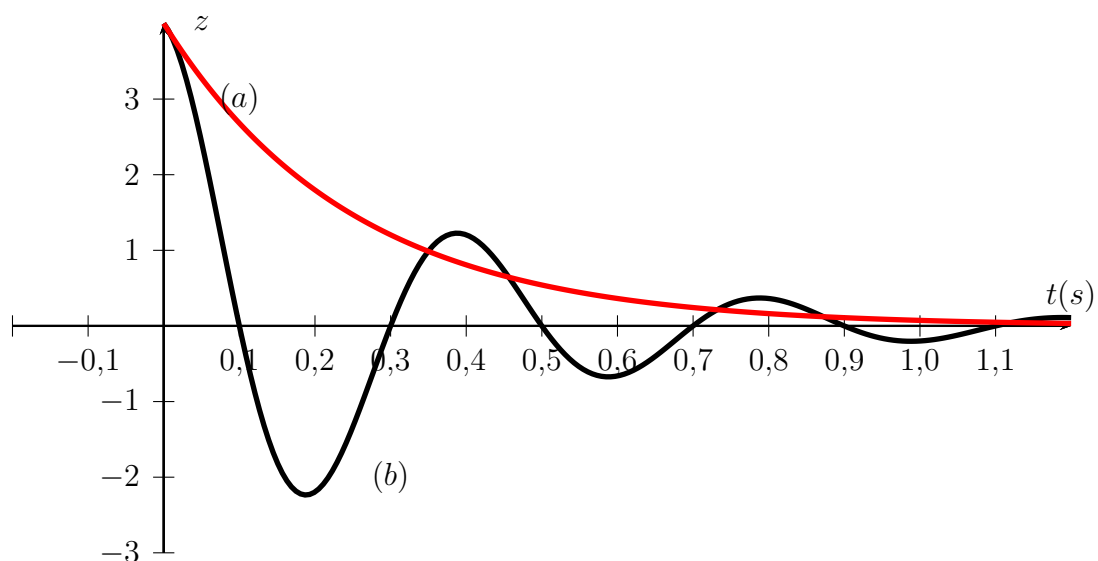
où α est une constante positive qui dépend de la qualité des amortisseurs appelée le coefficient d'amortissement.



1. Montrer que l'équation différentielle du mouvement de G est :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + \alpha \frac{dz}{dt} + K \cdot z = 0$$

2. Pour ce système mécanique, identifier l'excitateur et le résonateur.
3. On considère deux automobiles (A_1) et (A_2), assimilables chacune à un solide de même masse M reposant sur le ressort (R) vertical. On représente les courbes $z(t)$ des positions du centre d'inertie G du solide modélisant chaque automobile lors de passage sur une bosse.



- a. Donner les noms des régimes associés aux deux courbes.

- b. L'une des courbes présente une pseudo-période . Déterminer graphiquement sa valeur .
- c. Les allures différentes des courbes sont dues au coefficient d'amortissement α . Quelle courbe correspond à la plus grande valeur de α ? Justifier la réponse .
- d. Quelle automobile possède la meilleure suspension ?

Pendule de torsion

Exercice 1

Un pendule de torsion est constitué par un fil métallique vertical, fixé à l'une des extrémités un disque horizontal, homogène de masse $M = 5,60\text{kg}$ et de diamètre $d = 24\text{cm}$. L'autre extrémité du fil est étant fixé à un support. Le système (disque+fil) peut tourner autour d'un axe fixe (Δ) matérialisé par le fil métallique.

Lorsque on applique une force d'intensité $4,23\text{N}$ et de direction tangente à la gante du disque, ce dernier tourne d'un angle $\theta = 3,34^\circ$ de sa position d'équilibre stable. Puis on enlève cette force et on lâche le système sans vitesse initiale.

1. Calculer la constante de torsion C du fil métallique
2. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, Établir l'équation différentielle du mouvement du système.
3. La solution de l'équation différentielle s'écrit de la forme suivante :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi_0\right)$$

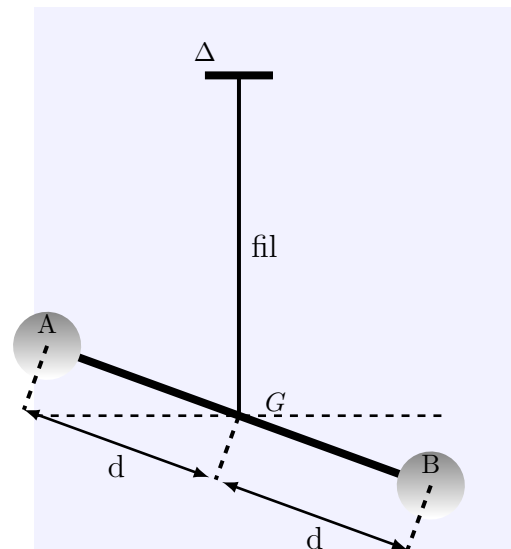
Déterminer l'expression de la période propre T_0 des oscillations et la fréquence f_0 et les calculer.

4. Écrire l'équation horaire du mouvement $\theta(t)$. Quelle est la nature de ce mouvement ?

Exercice 2

Une barre horizontale AB est supportée par un fil vertical dont une des extrémité est fixée au centre de gravité G de AB, et, l'autre extrémité est attachée à un point fixe O. Deux masse ponctuelles de 100g chacune sont placées sur l'axe AB de la barre, l'une sur GA et l'autre sur GB. On pose $GA = GB = d$

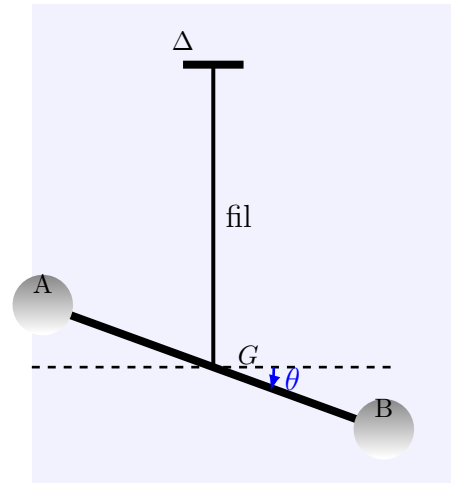
En absence des masse m , la période vaut 4s ; lorsque les masse sont placées de $d = 20\text{cm}$, la période vaut $6,93\text{s}$. Calculer le moment d'inertie de la tige et la constante de la torsion du fil.



Exercice 3

Une barre horizontale AB est supportée par un fil vertical de constante de torsion C dont une des extrémité est fixée au centre de gravité G de AB, et, l'autre extrémité est attachée à un point fixe O.

Deux masse ponctuelles de même masse sont placées sur l'axe AB de la barre
 Le moment d'inertie du système (tige + deux masses) par rapport à un axe Δ matérialisé par le fil vertical est $J_{\Delta} = 1,46 \text{ kg.m}^2$
 La période propre du pendule de torsion en absence de frottement est $T_0 = 7 \text{ min}$



1. Étude du pendule de torsion

On néglige tous les frottement et l'angle de torsion sera noté par θ , la vitesse angulaire par $\frac{d\theta}{dt}$ et l'accélération angulaire par $\frac{d^2\theta}{dt^2}$.

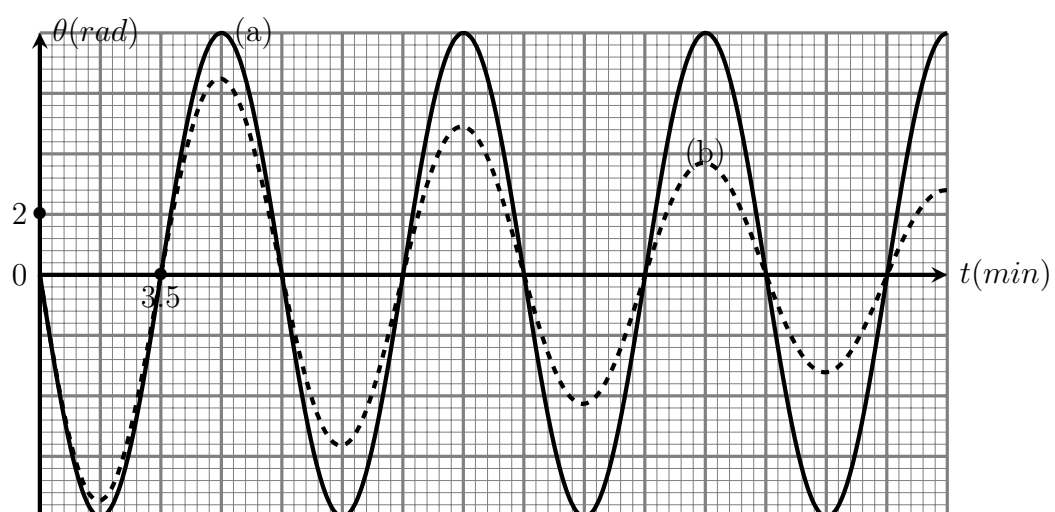
- Établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle de torsion θ au cours des oscillations du pendule de torsion.
- La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme suivante :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

En utilisant l'équation différentielle et sa solution, trouver l'expression de la période propre T_0 du pendule en fonction de C et J_{Δ} . En déduire la valeur de la constante de torsion C du fil utilisé dans cette expérience.

2. Exploitation de la représentation $\theta = f(t)$

On réalise deux expériences pour mesurer la période propre du pendule, l'une, avec frottements, l'autre en absence de frottements. Les deux courbes (a) et (b) de la figure ci-dessous représentent la variation de θ en fonction de t dans chaque cas.



- Indiquer, en justifiant votre réponse, la courbe correspond au régime pseudo-périodique
- Déterminer, en utilisant la figure ci-dessus en absence des frottements, la valeur de la vitesse angulaire du mouvement du pendule de torsion à l'instant $t = 0$

Pendule pesant et pendule simple

Exercice 1

On écarte un pendule pesant de sa position d'équilibre stable d'une abscisse angulaire de 30° et on le lâche . La durée nécessaire pour atteindre la position d'abscisse angulaire de -30° est $1,2s$.

1. Quelle est l'amplitude des oscillations ?
2. Déterminer la période des oscillations .
3. Après 20 oscillations , l'amplitude des oscillations devient égale à 15° .
 - (a) Pour quelle raison l'amplitude a-t-elle diminué ?
 - (b) Quelle est alors la nouvelle période des oscillations ? Pourquoi ?

Exercice 2

Un pendule simple est constitué d'un fil de longueur $50cm$, fixé , par l'une des extrémités , à un support et un solide (S) de masse $M=200\text{ g}$, accroché à l'autre extrémité . On écarte le pendule de sa position d'équilibre et on le lâche .

1. Décrire le mouvement du pendule .
2. Dans quel plan oscille le pendule ?
3. Donner l'expression de la période des oscillations et la calculer
4. La période dépend - t-elle de l'amplitude des oscillation ?

Exercice 3 : Pendule de Foucault

Le 31 Mars 1851, Foucault réalise une expérience pour apporter la preuve expérimentale de la rotation de la Terre autour de son axe . Il utilise un pendule composé d'une boule formée d'une enveloppe de cuivre renfermant du plomb de masse $m = 28kg$, suspendue à l'extrémité d'un fil d'acier de diamètre $d = 1,4mm$ et de longueur $l = 67m$ tre, accroché en un point situé au centre de la coupole .

1. Le pendule de Foucault est- il un pendule simple ?
2. Calculer la période propre des oscillations T_0
3. Le pendule qui se trouve au musée de Conservation des Arts et Métiers à Paris , est celui qui a été présenté à l'Exposition universelle de Paris en 1855 . Il est formé d'une sphère de masse $25kg$ est d'un fil d'acier de 18 m de long .
 - (a) Calculer la période propre des oscillations T_1
 - (b) Pourquoi l'amortissement des oscillations n'a-t-il pas gêné l'expérience de Foucault ?

Données : La densité du plomb $d = 11,3$ Le volume d'une sphère : $V = \frac{4}{3}\pi.R^3$

Exercice 4 : Analyse dimensionnel

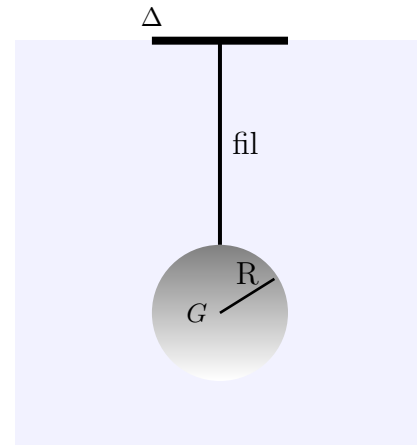
Un pendule est constitué d'un disque de rayon $R = 10\text{cm}$ et de masse m suspendu par un fil de masse négligeable, inextensible et de longueur $l = 15\text{cm}$.

1. peut-on assimiler ce pendule à un pendule simple ?
2. La période propre de ce pendule se calcule par la relation suivante :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{R^2/2 + (R + l)^2}{g(l + R)}}$$

- a. Vérifier par analyse dimensionnel que T_0 a la dimension du temps .
- b. Calculer la période des petites oscillations .
- c. Quelle est la longueur du pendule simple qui oscille avec la même période (pendule synchrone)

On prend $g = 10\text{m/s}^2$

**Exercice 5 : Retard d'une horloge**

Le balancier d'une horloge peut être assimilé à un pendule simple de période $T = 2,00\text{s}$

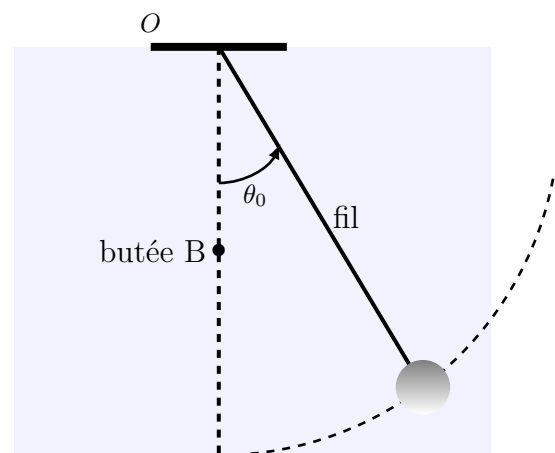
1. Quelle est la longueur de ce pendule ?
2. Une élévation de température provoque un allongement de pendule de 3mm
 - (a) Le pendule va-t-il avancer ou retarder ?
 - (b) Calculer l'écart entre l'heure juste et l'heure indiquée par l'horloge au bout de 24 heures
 - (c) Dans la pratique, sur les horloges de précision, comment fait-on pour limiter l'influence de la température ?

Exercice 6 : pendule peu particulier

Un pendule simple est constitué d'une masse ponctuelle suspendue à un point fixe O par un fil inextensible et sans masse de longueur $l = 60\text{cm}$.

À mi-hauteur du pendule et à la verticale du point O se trouve une butée fixe B ($OB = 30\text{cm}$).

On écarte le pendule d'un angle de $\theta_0 = 10^\circ$ puis on le lâche sans vitesse initiale



1. Calculer la durée Δt_1 mise par le pendule pour passer de sa position d'équilibre .

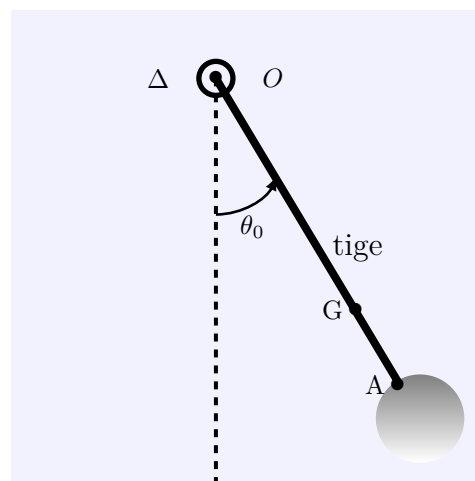
2. Calculer la durée Δt_2 mise par le pendule pour passer de sa position d'équilibre à la position extrême à gauche .
3. En déduire la période de ce pendule

Exercice 7 : pendule pesant

Un pendule pesant est constitué d'une boule homogène de rayon $r=2,5$ cm et de masse $m = 200g$ et d'une tige homogène de même masse que la boule et de longueur $L = 10r$, l'une des extrémités est soudée à la boule au point A . Le système (Tige+boule) peut tourner autour d'un axe fixe (Δ) passant par le point O de l'autre extrémité de la tige . (voir figure) On néglige tous les frottements et on prend $g = 10m/s^2$

Le moment d'inertie du système par rapport à l'axe Δ est $J_{\Delta} = 10^{-2}kg.m^2$.

On écarte le système de sa position d'équilibre stable d'un angle de $\theta_m = 10^\circ$ puis on le lâche sans vitesse initiale à la date $t=0$.



1. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique au système , montrer que l'équation différentielle du mouvement du système s'écrit sous la forme suivante :

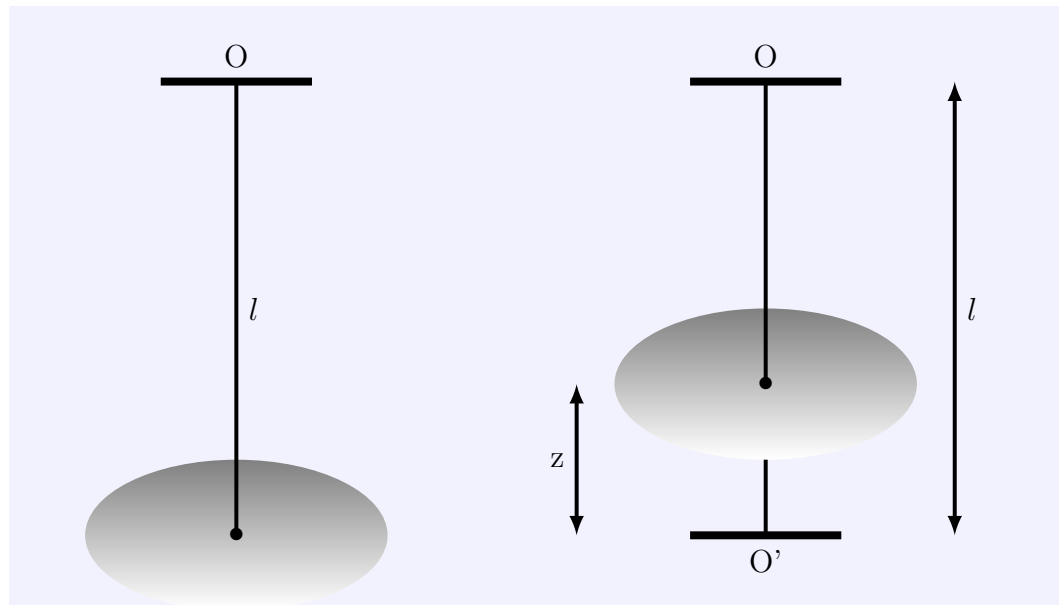
$$\ddot{\theta} + \left(\frac{16mg.r}{J_{\Delta}} \right) . \theta = 0$$

2. Quelle est la nature du mouvement du système ?
3. Calculer la période propre du mouvement ;
4. déterminer l'équation horaire du mouvement de système

Problèmes de synthèse

Exercice 1 :

Un pendule de torsion est constitué par un fil métallique vertical de longueur $l = 0,50m$, fixé à l'une des extrémités un disque horizontal, homogène de moment d'inertie par rapport à son axe Δ , $J_{\Delta} = 5 \times 10^{-5} kg.m^2$. L'autre extrémité du fil est étant fixé à un point O_1 . Le système (disque+fil) peut tourner autour d'un axe fixe (Δ) matérialisé par le fil métallique et qui passe par le centre d'inertie du disque.



1. Déterminer la nature du mouvement du disque dans le plan horizontal
2. Calculer la constante de torsion C si la période propre $T_0 = 0,92s$
3. Que devient cette période si la longueur est divisée par deux ?
4. Les extrémités supérieure et inférieure du fil étant immobiles, on fixe le disque du pendule tel que son centre d'inertie se trouve à une distance z du point O' du fil. On néglige l'épaisseur du disque devant z . Les deux brins de fil ont une torsion nulle. L'axe de rotation du pendule est vertical.
 - (a) Déterminer la nature du mouvement de nouveau pendule et trouver la période T'_0 en fonction de T_0 , l et z sachant que la constante de torsion d'un fil est inversement proportionnelle à sa longueur, si le fil est homogène et de section constante.
 - (b) Calculer T'_0 . On donne $z = \frac{l}{3}$
 - (c) Montrer que la période T'_0 prend une valeur maximale T'_{max} lorsque z est égale une valeur z_m . Calculer z_m et déduire la valeur de T'_{max} .

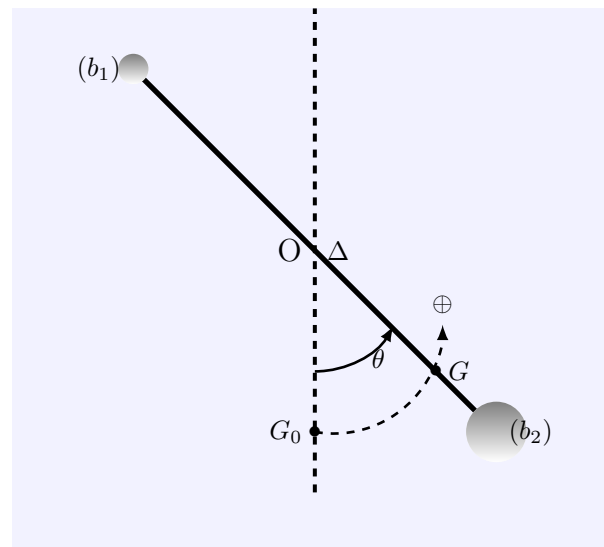
Exercice 2 :

Pour réaliser un pendule pesant, on fixe deux boules b_1 et b_2 ponctuelles de masses $m_1 = 50g$ et $m_2 = 4m_1$ aux bouts d'une tige homogène de masse négligeable et de longueur

$2l = 0,4m$ qui peut tourner autour d'un axe horizontal fixe (Δ) passant par son milieu O . La position d'équilibre stable du pendule pesant est lorsque le centre de gravité du système se coïncide avec G_0 . On écarte le pendule de sa position d'équilibre stable d'un angle très petit $\theta_m = \frac{\pi}{20} \text{rad}$ et on l'abandonne sans vitesse initiale.

On repère à chaque instant la position du pendule par son abscisse angulaire $\theta = (\overrightarrow{OG_0}, \overrightarrow{OG})$ voir figure.

Le moment d'inertie du système par rapport à l'axe (Δ) est $J_\Delta = (m_1 + m_2)l^2$.



1. En utilisant la relation barycentrique, montrer que le centre de gravité du pendule pesant est :

$$OG = \frac{3}{5}l$$

2. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique au pendule pesant, montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3g}{5l}\theta = 0$$

Quelle est la nature du mouvement de G ?

3. La solution de l'équation différentielle est la suivante $\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi_0\right)$, Déterminer l'expression de la période propre T_0 des oscillations en fonction de l, g . calculer T_0 .
4. On considère l'instant où le pendule passe par sa position d'équilibre stable avec une vitesse positive comme origine des dates. Écrire l'expression de l'équation horaire $\theta(t)$ en fonction du temps.
5. Soit $\vec{R}_T$ la composante tangentielle et $\vec{R}_N$ la composante normale de la réaction $\vec{R}$ appliquée par l'axe (Δ) à la tige.
 - (a) En appliquant la deuxième loi de Newton, déterminer, en fonction de m_1, m_2, g , et θ_m les expressions de $\vec{R}_T$ et $\vec{R}_N$, lorsque la tige est en position où $\theta = \theta_m$
 - (b) En déduire l'intensité de la réaction $\vec{R}$.

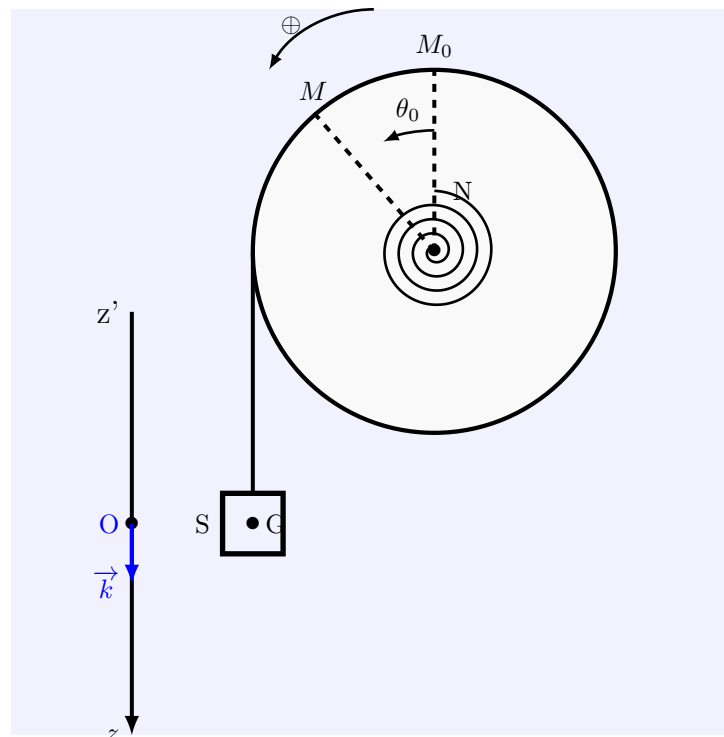
Exercice 3 :

Sur un disque homogène de rayon $r = 10\text{cm}$ soudé au son centre d'inertie à une tige cylindrique de masse négligeable et qui peut tourner autour d'un axe horizontal fixe et confondu avec l'axe du tige. Le moment d'inertie du disque est $J_{\Delta} = 2,50\text{kg.m}^2$, on entoure un fil dont l'extrémité libre supporte une masse $m = 42\text{kg}$. On fixe sur l'axe du disque l'extrémité d'un ressort spiral de masse négligeable, l'autre extrémité N étant liée à un support fixe.

Lorsque le ressort spirale n'est pas déformé, l'abscisse angulaire est nul ($\theta = 0$)

À l'équilibre, Le centre d'inertie du corps de masse m se coïncide avec l'origine O de l'axe verticale ($O, \vec{k}$) et l'angle de rotation du disque est θ_0

Le cylindre s'écarte de sa position d'équilibre d'un angle θ , est soumis de la part du ressort à un couple de torsion, de moment $\mathcal{M}_c = -C.\theta$ avec $C = 12\text{N.m/rad}$



1. Écrire une équation donnant θ_0 , angle correspondant à la position d'équilibre du système
2. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique système, montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{J_{\Delta} + mr^2}\theta = 0$$

3. La solution de l'équation différentielle est la suivante $\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi_0\right)$, Déterminer l'expression de la période propre T_0 des petites oscillations. Calculer sa valeur.

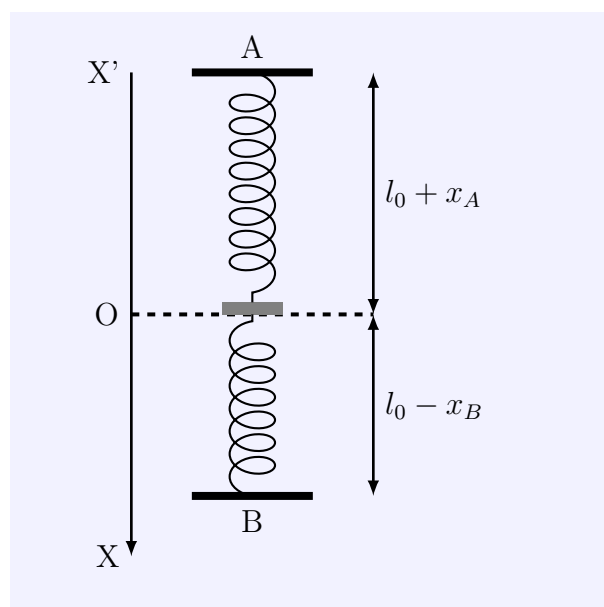
Exercice 4 :

Deux ressorts identiques de longueur l_0 , de raideur K , sont tendus entre deux points A

et B distant de L . Un disque D, de masse M et d'épaisseur négligeable, est fixé entre ces ressorts. voir figure.

On donne : $L = 45\text{cm}$; $l_0 = 15\text{cm}$; $K = 20\text{N/m}$; $g = 10\text{m/s}^2$ et $M = 0,1\text{kg}$

1. Déterminer la position d'équilibre du disque en déterminant x_A et x_B
2. Le disque est écarté de sa position d'équilibre verticalement, vers le bas de $d = 3\text{cm}$ et abandonné sans vitesse initiale.
 - a. Par une étude dynamique, donner l'équation différentielle du mouvement du disque (on choisira l'axe XX' comme sur la figure, son origine coïncidant avec la position d'équilibre)
 - b. En déduire l'équation horaire du mouvement de D
3. Retrouver l'équation horaire par une étude énergétique.



Exercice 5 : influence de la température et la longueur sur la période d'un pendule **

Un pendule est constitué par un tige métallique OA , de masse négligeable mobile autour d'un axe horizontal perpendiculaire à la tige passant par O . Sur l'extrémité A , on fixe une masse M supposée ponctuelle. Ce pendule est assimilable à un pendule simple de longueur $OA = l$, il effectue des oscillations de faible amplitude. Le pendule battant le seconde à 0°C ($T_0 = 2\text{s}$) en un lieu où $g_0 = 9,8\text{m/s}^2$.

1. Calculer la longueur $OA = l_0$ à cette température.
2. La température s'élève à 20°C . Quelle variation relative $\frac{\Delta T}{T_0}$ du pendule en résulte-t-il sachant que le coefficient de dilatation linéaire de la tige qui soutient la masse M est $\lambda = 1,85 \times 10^{-5}\text{S.I}$.

On donne la relation des dilatation des solide en fonction de la température en $^\circ\text{C}$ est :

$$l = l_0(1 + \lambda.\theta)$$

avec l_0 la longueur de la tige à la température $\theta^\circ C$ et pour $\varepsilon \ll 1$, nous avons l'approximation suivante : $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n.\varepsilon$

3. Ce pendule constitue le balancier d'une horloge dont la marche est exacte à $0^\circ C$ (bat la seconde). Cette horloge avance-t-elle ou retarde-t-elle lorsque la température s'élève à $20^\circ C$? de combien dans un jour?

4. À la température $20^\circ C$ la longueur de la tige est l , on fixe une petite masse ponctuelle m au milieu de la tige. Calculer la nouvelle période de ce pendule composé en fonction de l, M, m et g .

On rappelle que le moment d'inertie d'une masse ponctuelle m distant de l'axe de rotation de d est $J_\Delta = md^2$

Montrer que la présence de m diminue la période propre du pendule.

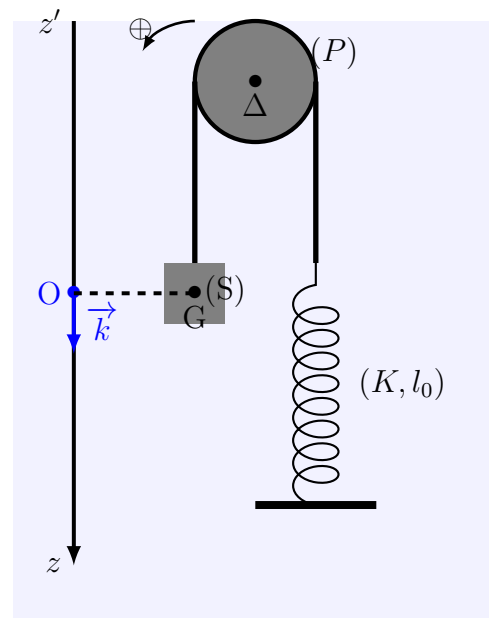
5. Quelle doit être la valeur de m pour que le pendule ainsi modifié bat rigoureusement la seconde à $20^\circ C$

Exercice 6 : détermination du moment d'inertie d'un cylindre d'une poulie homogène (P)

Le but de cet exercice est de déterminer le moment d'inertie J_Δ d'un cylindre d'une poulie homogène de rayon $r = 0,15m$ qui peut tourner autour de son axe Δ fixe.

On considère un ressort à spire non jointif de masse négligeable et de raideur K et sa longueur initiale est $l_0 = 0,2m$.

On relie l'extrémité mobile du ressort à un corps solide (S) de masse $m = 0,3kg$ par un fil inextensible et de masse négligeable passant par la gorge de la poulie (P) sans glissement.



1. À l'équilibre la longueur finale du ressort est $l = 0,25m$, déterminer l'expression du raideur du ressort et calculer sa valeur. 2. On écarte le corps (S) de sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale.

2.1 En faisant une étude dynamique sur le système mécanique, établir l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie de (S).

2.2 Déterminer l'expression du moment d'inertie de la poulie (P) J_Δ en fonction de m, r, K et la période propre T des oscillations. 2.3 Calculer J_Δ sachant que la période propre $T = 0,49s$.