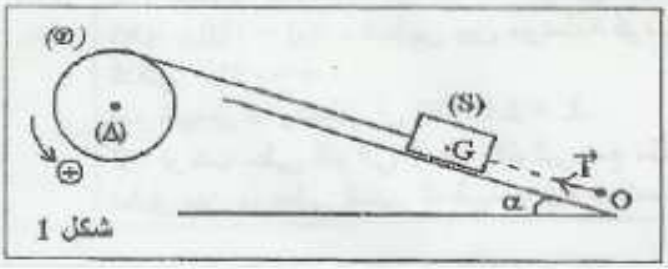
موضوع البكالوريا في الميكانيك لدورة يونيو 2007/ 2008

موضوع شعبة العلوم التجريبية:الإمتحان الوطني



شكل 1

التمرين 1 (5,5 نقط)

نهمل جميع الاحتكاكات و نأخذ $g = 10\ m.s^{-2}$.

1- نعتبر قرصا متجانسا (D) ، شعاعه $r = 10cm$ ، قابلا للدوران حول محور أفقي ثابت (Δ) منطبق مع محور تماثله. نلف حول القرص خيطا، غير قابل للامتداد، كتلته مهملة ولا ينزلق على القرص، ونثبت بطرفه الحر جسما صلبا (S) كتلته $m=0,5kg$.

الجسم (S) قابل للانزلاق على سطح مائل بالزاوية $\alpha = 30°$ بالنسبة للمستوى الأفقي (شكل1).

نطبق، بواسطة محرك، على القرص (D) مزدوجة محركة عزمها $\mathcal{M}$ ثابت، فينطلق مركز القصور G للجسم (S) بدون سرعة من الموضع O لينتقل وفق المحور $(O,\vec{i})$ بتسارع ثابت $a = 2\ m.s^{-2}$.

1.1- حدد طبيعة حركة كل من الجسم (S) والقرص (D) .

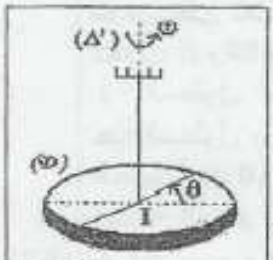
1.2- اكتب المعادلة الزمنية $x(t)$ لحركة G باتخاذ الموضع O أصلا للأفاصيل واللحظة التي تأخذ فيها سرعة (S) القيمة $1m.s^{-1}$ أصلا للتواريخ.

1.3- احسب عند اللحظة $t = 0,5\ s$ التسارع المماسي a_T والتسارع المنظمي a_N لنقطة من محيط القرص.

1.4- أوجد قيمة العزم $\mathcal{M}$ للمزدوجة المحركة.

عزم قصور القرص بالنسبة للمحور (Δ) هو $J_\Delta = 9.10^{-3}\ kg.m^2$.

2- نأخذ القرص (D) و نثبت في مركزه I سلك لي رأسي، كتلته مهملة وثابتة ليه C فنحصل على متذبذب (شكل2).

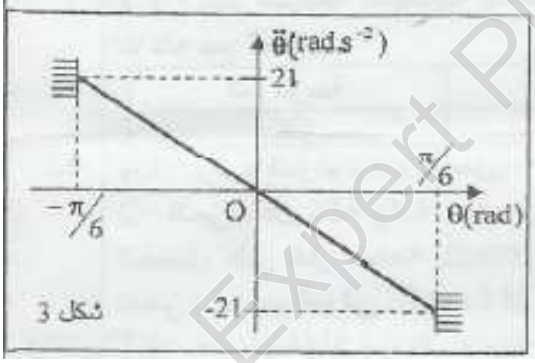


شكل 2

ندير القرص (D) بزاوية θ_m ، انطلاقا من موضع التوازن $(\theta = 0)$ حيث السلك غير ملتو، ثم نحرر القرص بدون سرعة بدئية، فينجز حركة تذبذبية حول محور رأسي (Δ') منطبق مع محور السلك. عزم قصور القرص بالنسبة للمحور (Δ') هو $J_{\Delta'} = 9.10^{-3}\ kg.m^2$.

نعتبر موضع التوازن حالة مرجعية لطاقة وضع اللي $(E_p = 0)$.

2.1- اعتمادا على الدراسة الطاقية، أثبت المعادلة التفاضلية لحركة القرص (D).



شكل 3

2.2- يمثل منحنى الشكل3 تغيرات التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ للقرص بدلالة الأفصول الزاوي θ .

أوجد، اعتمادا على المبيان، قيمة كل من الوسع θ_m والنبض الخاص ω_0 لحركة المتذبذب واستنتج قيمة ثابتة اللي C .

2.3- احسب الطاقة الميكانيكية للمتذبذب. نأخذ $\pi^2 = 10$.

Expert PDF Evaluation

التصحيح

الفيزياء

التمرين 1

1) 1-1: حركة الجسم S مستقيمية متغيرة بانتظام متسارعة نحو الأعلى.
وحركة القرص دورانية متغيرة بانتظام .

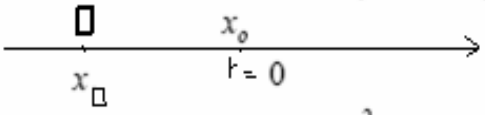
1-2: المعادلة الزمنية لحركة G تكتب كما يلي :

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

مع : $a = 2m/s^2$ و $v_o = 1m/s$ من خلال المعطيات لدينا : الجسم ينطلق بدون سرعة من ▯ اصل المعلم $v_▯ = 0$

بتطبيق العلاقة المستقلة عن الزمن بين ▯ والنقطة المطابقة لاصل التواريخ .

$$v_o^2 - v_▯^2 = 2a.(x_o - x_▯) \Leftarrow v_o^2 = 2.a.x_o$$ ومنه:



$$x_o = \frac{v_o^2}{2a} = \frac{1}{2\times 2} = 0,25m$$

إذن:

$$\underline{x = t^2 + t + 0,25}$$

1-3: من خلال دالة السرعة : $v = at + v_o$ التي تكتب كما يلي : $v = 2t + 1$

لدينا : $\frac{dv}{dt} = 2$

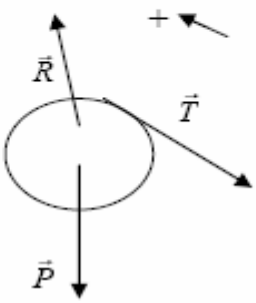
إذن: التسارع المماسي: $a_T = \frac{dv}{dt} = 2m/s^2$

وفي اللحظة $t = 0,5s$ تكون قيمة السرعة : $v = 2\times 0,5 + 1 = 2m/s$

إذن التسارع المظمي : $a_N = \frac{v^2}{r} = \frac{2^2}{0,1} = 40m/s^2$

1-4: بتطبيق العلاقة الاساسية للديناميك على كل من البكرة والجسم S لدينا :

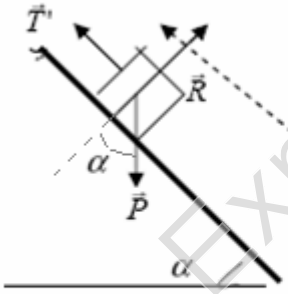
بالنسبة للبكرة : $\sum M_\Delta F = J_\Delta.\ddot{\theta}$



$$M_\Delta\vec{P} + M_\Delta\vec{R} + M_\Delta\vec{T} + \mathrm{M} = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

$$O + O - T.r + \mathrm{M} = J_\Delta.\ddot{\theta}$$ لأن العزم محرك

ومنه: $(1)\quad \mathrm{M} = J_\Delta.\frac{a}{r} + T.r$ لأن: $a = r.\ddot{\theta}$



وبالنسبة للجسم S لدينا $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}_G$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T'} = m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على ox: $-P.\sin\alpha + o + T' = m..a$

الخيط غير قابل للمد $T' = T$

ومنه

$$T = m(g.\sin\alpha + a) = 0,5\times(10\times 0,5 + 2) = 3,5N$$

وبالتعويض في العلاقة (1) لدينا :

$$\mathrm{M} = J_\Delta.\frac{a}{r} + T.r = 9\times 10^{-2}\times\frac{2}{0,1} + 3,5\times 0,1 = 0,53N.m$$

---

2) 2-1:

$E_M = Ec + Ep$ أي : $E_M = \frac{1}{2}c.\theta^2 + \frac{1}{2}J_\Delta.\dot{\theta}^2 = Cte$

$\frac{dE_M}{dt} = \frac{1}{2}.c\times 2\theta\dot{\theta} + \frac{1}{2}J_\Delta\times 2.\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$ ومنه : $J_\Delta.\ddot{\theta} + C\theta = 0$

Expert PDF Evaluation

أي: $\ddot{\theta}+\frac{C}{J_\Delta}\theta=0$ المعادلة التفاضلية للحركة ونبضها الخاص : $\omega_0{}^2=\frac{C}{J_\Delta}$

وأخيرا المعادلة التفاضلية تصبح :

$$\ddot{\theta}+\omega_0{}^2.\theta=0$$

2-2: مبيانيا لدينا : $\theta_m=\frac{\pi}{6}$

والمنحنى الممثل لتغيرات $\ddot{\theta}$ بدلالة θ عبارة عن دالة خطية معاملها الموجه

$$k=\frac{\Delta\ddot{\theta}}{\Delta\theta}=\frac{21-0}{-\frac{\pi}{6}-0}=-\frac{21\times6}{\pi}\approx-40$$

إذن معادلته : $\ddot{\theta}=-40\theta$ (a)

ومن خلال المعادلة التفاضلية السابقة لدينا : $\ddot{\theta}=-\omega_0{}^2\theta$ (b)

من خلال (a) و (b) : $\omega_0{}^2=40$ وبالتالي: النبض الخاص $\omega_0=\sqrt{40}\approx6{,}33rad/s$

وثابتة اللي : $C=J_\Delta\omega_0{}^2=9\times10^{-3}\times40=0{,}36N.m/rad$

2-3: الطاقة الميكانيكية للمتذبذب : $E_M=\frac{1}{2}c\theta_m{}^2=0{,}5\times0{,}36\times\frac{\pi^2}{36}=0{,}5\times0{,}36\times\frac{10}{36}=0{,}05J$

موضوع الامتحان الوطني في الميكانيك لدورة يونيو علوم رياضية2007

التمرين 1- (5.5 نقط)

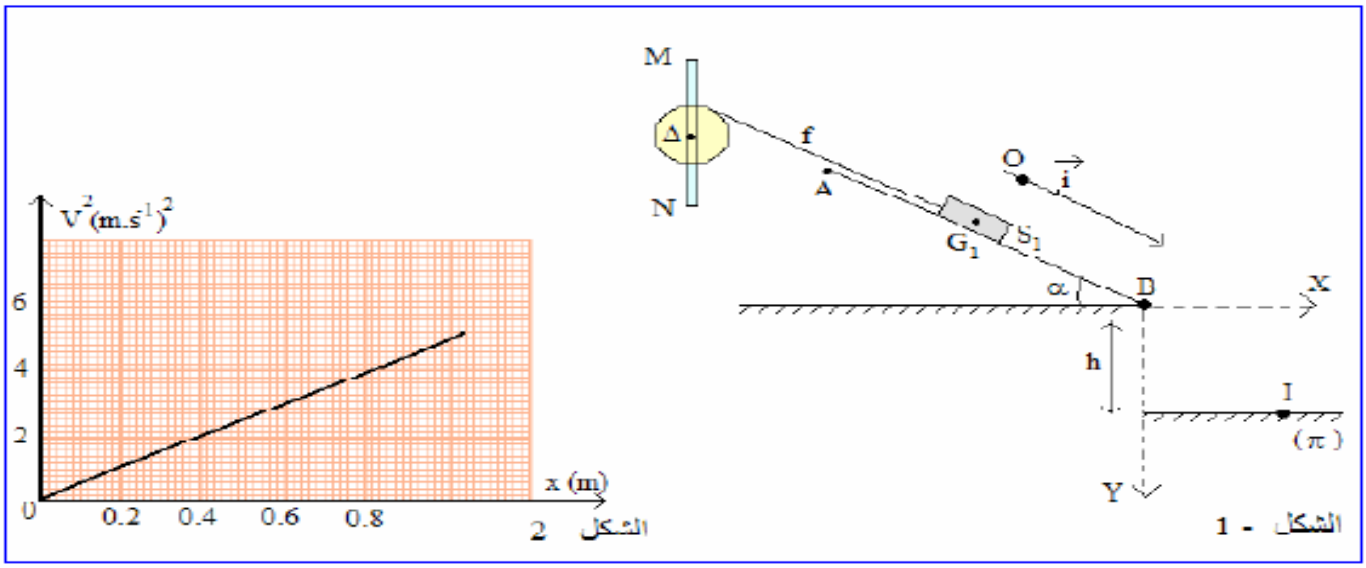
نهمل جميع الاحتكاكات و نأخذ $g=10m.s^{-2}$ و $\pi^2=10$.

نعتبر المجموعة (S) الممثلة في الشكل – 1 و التي تتكون من :

- بكرة متجانسة شعاعها $r=5cm$ ملتحمة بساق طولها $MN=2L=40cm$ ينطابق مركز قصورها مع المركز G للبكرة . المجموعة " الساق + البكرة " قابلة للدوران في المستوى الرأسي حول محور أفقي (Δ) ثابت يمر من المركز G . عزم قصور المجموعة بالنسبة للمحور (Δ) هو J_Δ .
- خيط (f) غير مدود كتلته مهملة ملفوف حول مجرى البكرة و تبت احد طرفيه بجسم صلب (S_1) ، كتلته $m=0.8kg$ و مركز قصوره G_1 . الجسم (S_1) قابل للانزلاق على مستوى مائل بزاوية $\alpha=30^0$ بالنسبة للمستوى الأفقي وفق الخط الأكبر ميلا .

نعتبر أن الخيط (f) لا ينزلق على مجرى البكرة أثناء الحركة . نحرر المجموعة بدون سرعة بدئية عند اللحظة $t=0$ حيث يكون G_1 منطبقا مع الأصل O للمعلم $(O,\vec{i})$. نعلم عند كل لحظة موضع G_1 بالافصول x .

Expert PDF Evaluation



1 – اوجد ، اعتمادا على الدراسة التحريكية ، تعبير التسارع a لحركة الجسم (S_1) بدلالة : m ، J_Δ ، r ، α و g .

2 – يمثل منحنى الشكل – 2 تغيرات مربع السرعة للجسم (S) بدلالة x : $V^2 = f(x)$.

2 – 1 – حدد قيمة a و استنتج قيمة التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ للمجموعة " الساق + البكرة "

2 – 2 – ينفصل الجسم (S_1) عن الخيط لحظة مروره بالنقطة B ذات الافصول $x_B = 0.8m$ فيسقط عند نقطة I على المستوى الأفقي (π) الذي يوجد على مسافة $h = 1m$ من النقطة B.

2 – 2 – 1 – اوجد إحداثيتي النقطة I في المعلم $(\overrightarrow{BX}.\overrightarrow{BY})$.

2 – 2 – 2 – احسب السرعة الخطية للطرف M للساق بعد انفصال الجسم (S_1) عن الخيط .

3 – نعيد ربط الخيط بالجسم (S_1) و نثبت بالساق في نقطة M' ، بحيث $MM' = \frac{L}{2}$ ، نابضا لفاته غير متصلة و كتلته مهملة و صلابته $K = 50N.m^{-1}$ ، الطرف الثاني للنابض مثبت بحامل "الشكل – 3 " . يكون النابض عند التوازن أفقيا و مطالا و الساق MN رأسية و أفصولها G_1 منطبقا مع الأصل O للمعلم $(O;\vec{k})$.

3 – 1 – اوجد ، عند التوازن ، تعبير إطالة النابض Δl بدلالة المقادير اللازمة .

3 – 2 – نزيح الجسم (S_1) عن موضع توازنه بمسافة $d = 1m$ نحو الأسفل وفق الخط الأكبر ميلا فتدور المجموعة " الساق + البكرة " بزاوية صغيرة θ_0 و نحرره بدون سرعة بدئية عند اللحظة $t = 0$.

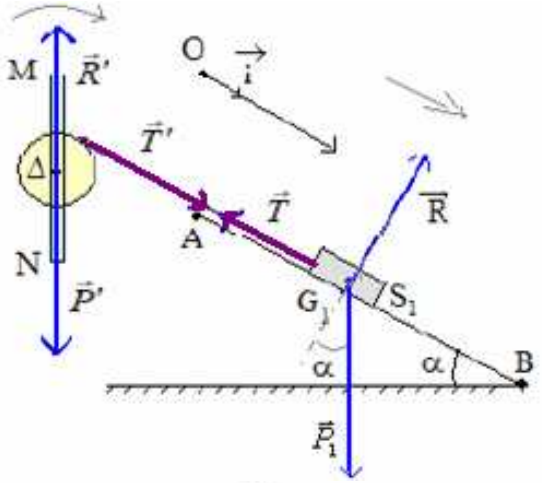
التصحيح

- 1

- المجموعة المدروسة : الجسم (S_1)
- المعلم : مرتبط بالأرض و يعتبر غاليليا
- جرد القوى : وزن الجسم $\vec{P}_1$ ، تأثير السطح $\vec{R}$ ، تأثير الخيط (f) $\vec{T}$.
- تطبيق ع . أ . د : $\sum \vec{F}_{APP} = m_1.\vec{a}$ و منه : $\vec{P}_1 + \vec{R} + \vec{T} = m_1.\vec{a}$.
- إسقاط ع . أ . د على المحور $(O;\vec{i})$ نحصل على : $m_1.g.\sin\alpha - T = m_1.a$

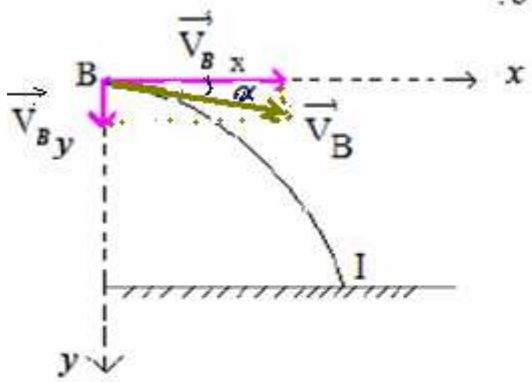
و بالتالي : $\boxed{T = m_1.g.\sin\alpha - m_1.a}$ (1)

Expert PDF Evaluation



حساب التسارع الزاوي للمجموعة : $\ddot{\theta} = \frac{a}{r} = \frac{2.5}{5.10^{-2}} = 50 rad.s^{-2}$.

2 – 2 – 1 – إحداثتيي النقطة I :



- حساب السرعة V_B

باستعمال العلاقة المستقلة عن الزمن بين الموضعين O و B،

نجد سرعة الجسم (S_1) عند الموضع B :

$$V_B = \sqrt{2.a.x_B} = 2m.s^{-1}$$

- المعادلتين الزمنيتين :

$$\begin{cases} x = V_B.\cos(\alpha)t \\ y = \frac{1}{2}.g.t^2 + V_B.\sin(\alpha)t \end{cases}$$

بعد إقصاء الزمن $t = \frac{x}{V_B.\cos(\alpha)}$ نحصل على معادلة المسار

$y = \frac{g}{2V_B^2.\cos^2(\alpha)}.x^2 + \tan(\alpha).x$ و منه : $y_I = h = \frac{g}{2V_B^2.\cos^2(\alpha)}.x_I^2 + \tan(\alpha).x_I$ و بالتالي

- المجموعة المدروسة : البكرة
- المعلم : مرتبط بالأرض و يعتبر غاليليا
- جرد القوى : وزن البكرة $\vec{P}'$ ، تأثير محور الدوران $\vec{R}'$ ، تأثير الخيط (f) $\vec{T}'$
- تطبيق ع . أ . د : $\sum M_\Delta(\vec{F}_{app}) = J_\Delta.\ddot{\theta}$ و منه :

$M_\Delta(\vec{P}') + M_\Delta(\vec{R}') + M_\Delta(\vec{T}') = J_\Delta.\ddot{\theta}$ مع $M_\Delta(\vec{P}') = M_\Delta(\vec{R}') = 0$

و بالتالي نحصل على المعادلة التالية : $\boxed{T'.r = J_\Delta.\ddot{\theta}}$ (2)

بما أن الخيط غير مدود و كتلته مهملة فان : $T' = T$ و من جهة أخرى لا ينزلق على مجرى البكرة فان :

$\theta = \frac{x}{r}$ و منه : $\ddot{\theta} = \frac{a}{r}$. من المعادلتين (1) و (2) نستنتج تعبير تسارع الجسم حيث : $a = g.\frac{m.\sin\alpha}{m + \frac{J_\Delta}{r^2}}$

2 – 1 - $V^2 = f(x)$ دالة خطية معادلتها : $V^2 = K.x$ مع K يمثل المعامل الموجه للمنحنى ، نحصل باشتقاق

هذه المعادلة بالنسبة للزمن على : $2.V.\frac{dV}{dt} = K.V$ و منه : $a = \frac{K}{2} = \frac{1}{2}.\frac{\Delta(V^2)}{\Delta(x)} = 2.5m.s^{-2}$.

Expert PDF Evaluation

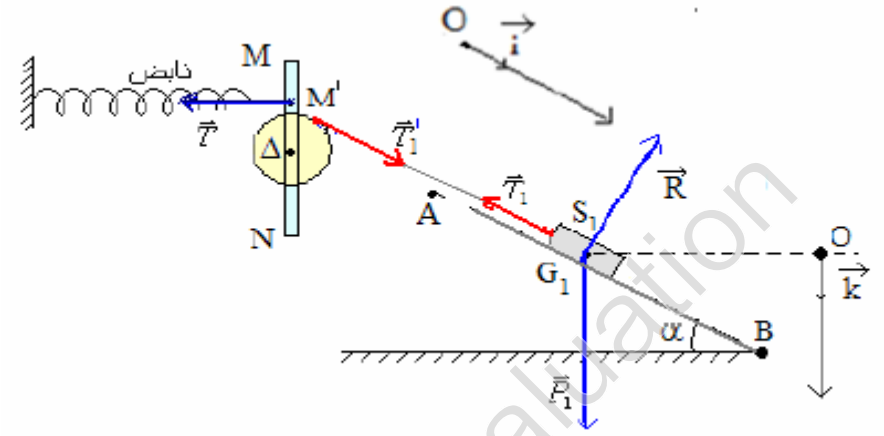
نحصل على معادلة من الدرجة الثانية : $\frac{g}{2.V_B^2.\cos^2(\alpha)}.x_I^2 + \tan(\alpha).x_I - h = 0$ التي يمكن كتابتها على الشكل التالي : $1.66.x_I + 0.577.x_I - 1 = 0$ و أحد حلولها $x_I = 0.62m$

إحداثيتي النقطة I $\left\{ \begin{array}{l} x_I = 0.62m \\ y_I = 1m \end{array} \right.$

2 – 2 – 2 – السرعة الخطية للطرف M بعد انفصال الجسم :

$\dot{\theta}_B = \dot{\theta}_M$ و التعويض نجد : $\frac{V_B}{r} = \frac{V_M}{L}$

و بالتالي : $\boxed{V_M = V_B \frac{L}{r} = 8m.s^{-1}}$.



1-3 دراسة التوازن :

- الجسم (S_1) : $\sum \vec{F} = \vec{0}$ و منه : $T_1 = m_1.g.\sin(\alpha)$
- البكرة : $\sum M_\Delta = 0$ و منه $T.\frac{L}{2} = T_1'.r$ حيث $T = K.\Delta l$ و $T_1' = T_1$

إطالة النابض عند التوازن من خلال العلاقتين السابقتين : $\boxed{\Delta l = 2.\frac{m.g.r.\sin(\alpha)}{K.L}}$

3 – 2 – 1 – الدراسة الطاقية للمجموعة " (S) "

- الطاقة الحركية : $\boxed{E_C = \frac{1}{2}.m.V^2 + \frac{1}{2}.J_\Delta.\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}.m.V^2 + \frac{1}{2}.J_\Delta.\frac{V^2}{r^2} = \left(\frac{J_\Delta}{r^2} + m\right)\frac{V^2}{2}}$
- طاقة الوضع المرنة : $E_{Pe} = \frac{1}{2}.K(\Delta l + d)^2 + C^{te}$ مع الثابتة $C^{te} = 0$ حسب مرجع طاقة الوضع

Expert PDF Evaluation

المرنة و كذلك : $d = \frac{L}{2}.\theta$ و بالتالي :

$$\boxed{E_{Pe} = \frac{1}{2}.K\left(\Delta l + \frac{L}{2}.\theta\right)^2 = \frac{1}{2}.K.\Delta l^2 + \frac{1}{2}K.\frac{L^2.\theta^2}{4} + \frac{1}{2}.K.\Delta l.\theta}$$

- طاقة الوضع التقالية : $E_{PP} = -m.g.z + C^{te}$ مع الثابتة $C^{te} = 0$ و بالتالي : $\boxed{E_{PP} = -m.g.z}$

بما ان جميع الاحتكاكات مهملة فان الطاقة الميكانيكية تتحفظ و بالتالي : $\frac{dE_m}{dt} = 0$ و منه نحصل بالاشتقاق على :

- $$\frac{dE_C}{dt} = \left(\frac{J_\Delta}{r^2} + m\right).V.\dot{V} = \left(\frac{J_\Delta}{r^2} + m\right).\dot{x}.\ddot{x} = \left(\frac{J_\Delta}{r^2} + m\right).\frac{\dot{z}}{\sin(\alpha)}.\frac{\ddot{z}}{\sin(\alpha)}$$

- $$\frac{dE_{Pe}}{dt} = K.L^2\frac{\theta.\dot{\theta}}{4} + \frac{K.\Delta l.L..\dot{\theta}}{2} = K.\frac{L^2}{4}.\frac{x}{r}.\frac{\dot{x}}{r} + \frac{K.\Delta l.L.\dot{x}}{r}$$

$$\frac{dE_{Pe}}{dt} = K.\frac{L^2}{4}.\frac{z}{r.\sin(\alpha)}.\frac{\dot{z}}{r.\sin(\alpha)} + \frac{K.\Delta l.L\dot{z}}{2.r.\sin(\alpha)}$$

$$z = x\sin\alpha$$

- $$\frac{dE_{PP}}{dt} = -m.g.\dot{z}$$

و بالتعويض :

$$\frac{dE_m}{dt} = \left(\frac{J_\Delta}{r^2} + m\right)\frac{\dot{z}.\ddot{z}}{\sin^2(\alpha)} + \frac{K.L^2.z.\dot{z}}{4.r^2.\sin^2(\alpha)} + \frac{K.L.\Delta l.\dot{z}}{2.r.\sin(\alpha)} - m.g.\dot{z} = 0$$

من خلال العلاقة المحصل عليها في الدراسة السكونية : $m.g = \frac{K.L.\Delta l}{2.r.\sin(\alpha)}$ و بالتالي :

$$\frac{dE_m}{dt} = \left(\frac{J_\Delta}{r^2} + m\right)\frac{\dot{z}.\ddot{z}}{\sin^2(\alpha)} + \frac{K.L^2.z.\dot{z}}{4.r^2.\sin^2(\alpha)} = 0$$

و بالتالي : $\left(\frac{J_\Delta}{r^2} + m\right).\ddot{z} + \frac{K.L^2.z}{4.r^2.} = 0$ و منه نحصل على المعادلة التفاضلية : $\boxed{\ddot{z} + \frac{K.L^2}{4(J_\Delta + m.r^2)}.z = 0}$

معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الثانية معاملها $\omega_0^2 = \frac{K.L}{4(J_\Delta + m.r^2)}$ ثابت و موجب و حلها جيبي .

3 – 2 – 2 – المعادلة الزمنية لحركة الجسم : $z = z_m.\cos(\omega_0.t + \varphi)$ حيث : $\omega_0 = \frac{2.\pi}{0.5} = 4.\pi\ rad.s^{-1}$ و

$\varphi = 0$ لان عند $t = 0$ $z = z_m = d.\sin(\alpha)$ و بالتالي : $z = 5.10^{-2}.\cos(4.\pi.t)$.

تصحيح الموضوع الأول : عبد الكريم سبيرو

الموضوع الثاني : عبد العلي رضوان

Sbiro abdelkrim

Expert PDF Evaluation