

الاتصال في نقطة:

تعريف

$$f \text{ متصلة في } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

الاتصال على اليمين - الاتصال على اليسار:

$$f \text{ متصلة على اليمين في } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

$$f \text{ متصلة على اليسار في } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

$$f \text{ متصلة في } x_0 \Leftrightarrow f \text{ متصلة على اليمين و على اليسار في } x_0$$

الاتصال على مجال:

تكون f متصلة على مجال مفتوح $]a, b[$ إذا كانت f متصلة في كل نقطة من المجال $]a, b[$

تكون f متصلة على مجال مغلق $[a, b]$ إذا كانت f متصلة على المجال المفتوح $]a, b[$ و متصلة على اليمين a و متصلة على يسار b

العمليات على الدوال المتصلة:

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I و k عدد حقيقي

- الدوال $f + g$, $f \times g$, kf متصلة على المجال I
- إذا كانت g لا تنعدم على I فإن الدالتين $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ متصلتين على المجال I

نتائج:

- كل دالة حدودية متصلة على $\mathbb{R}$
- كل دالة جذرية متصلة على مجموعة تعريفها
- الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$
- الدالتان $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$ متصلتان على $\mathbb{R}$
- الدالة $x \mapsto \tan x$ متصلة على مجموعة تعريفها $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

اتصال مركب دالتين:

إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على مجال J بحيث: $f(I) \subset J$ فإن: $g \circ f$ متصلة على المجال I

صورة مجال بدالة متصلة:

- صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة
- صورة مجال بدالة متصلة هي مجال

حالات خاصة: لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعاً على مجال I

الجدول التالي يوضح طبيعة المجال $f(I)$

المجال I		المجال f(I)
I		f تناقصية قطعاً على I
[a,b]		$[f(b); f(a)]$
[a,b[		$\left[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a) \right]$
]a,b]		$\left[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right]$
]a,b[		$\left[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right]$
[a, +\infty[		$\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a) \right]$
]a, +\infty[		$\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right]$
]-\infty, a]		$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right]$
]-\infty, a[		$\left[\lim_{x \rightarrow a^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right]$
$\mathbb{R}$		$\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right]$

مبرهنة القيم الوسيطة:

إذا كانت f متصلة على مجال $[a, b]$ فإنه لكل عدد حقيقي β محصور بين العددين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عد حقيقي α من المجال $[a, b]$ بحيث: $f(\alpha) = \beta$

نتيجة:

إذا كانت f متصلة على مجال $[a, b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلاً α ينتمي إلى المجال $[a, b]$
إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على مجال $[a, b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α ينتمي إلى المجال $[a, b]$

طريقة التفرع الثنائي:

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على مجال $[a, b]$ بحيث: $f(a) \times f(b) < 0$ وليكن α الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[a, b]$

إذا كان: $f(b) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ فإن: $\frac{b-a}{2} < \alpha < b$ وهذا التأطير سعته $\frac{a+b}{2}$ يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$ للحصول على تأطير أدق للعدد α

إذا كان: $f(a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ فإن: $a < \alpha < \frac{a+b}{2}$ وهذا التأطير سعته $\frac{b-a}{2}$ يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$ للحصول على تأطير أدق للعدد α

ملاحظة: وهكذا دواليك يمكن إعادة هذه الطريقة إلى أن يتم الحصول على تأطير للعدد α سعته مرغوب فيها