

ملخص درس المجموعات

(1) الإلتواء - التضمن - التساوي - مجموعة أجزاء مجموعة :

(a) - تعريف مجموعة:

Un ensemble est une collection d'objets: نسمي مجموعة كل تجميع لعناصر معينة:

يمكن كتابة مجموعة E بطريقتين:

- بتفصيل وذلك بجرد جميع عناصرها.
- بإدراك وذلك بتحديد علاقة مميزة لعناصرها.

المجموعة الفارغة نرمز لها بالرمز: $\emptyset$

(b) - الإلتواء:

لتكن E مجموعة.

نقول إن a ينتمي إلى E إذا كان a عنصرا من E و نكتب $a \in E$

نقول إن a لا ينتمي إلى E إذا كانت المجموعة E لا تحتوي على العنصر a و نكتب $a \notin E$

(c) - التضمن:

A و B جزآن من مجموعة E .

نقول إن A ضمن B أو B يتضمن A و نكتب $A \subset B$ ، إذا كان كل عنصر من A ينتمي إلى B .

بتعبير آخر: $A \subset B \Leftrightarrow [\forall x \in E, x \in A \Rightarrow x \in B]$

خاصية :

A و B و C ثلاثة أجزاء من مجموعة E

إذا كان $A \subset B$ و $B \subset C$ فإن $A \subset C$

(d) - التساوي :

A و B جزآن من مجموعة E .

نقول إن A و B متساويتان و نكتب $A = B$ إذا كان $A \subset B$ و $B \subset A$.

(e) - مجموعة أجزاء مجموعة:

لتكن E مجموعة.

المجموعة المكونة من جميع أجزاء E تسمى مجموعة أجزاء المجموعة E و نرمز لها بالرمز $P(E)$

لدينا: $A \in P(E) \Leftrightarrow A \subset E$

لكل مجموعة E لدينا: $\emptyset \in P(E)$ و $E \in P(E)$

(2) العمليات في المجموعة $P(E)$:

a - تقاطع مجموعتين :

A و B جزآن من مجموعة E .

تقاطع المجموعتين A و B هو المجموعة التي نرمز لها بالرمز $A \cap B$ والمكونة من العناصر التي تنتمي إلى A وإلى B

لدينا: $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ و } x \in B\}$ و نكتب: $(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ و } x \in B)$

خاصية : A و B و C أجزاء من مجموعة E، لدينا:

$$(1) \quad A \cap B \subset B \text{ و } A \cap B \subset A$$

$$(2) \quad A \cap \emptyset = \emptyset \text{ و } A \cap A \subset A$$

$$(3) \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \text{ و } A \cap B = B \cap A$$

$$(4) \quad A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$$

b - اتحاد مجموعتين :

A و B جزآن من مجموعة E.
اتحاد A و B هو المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي إلى A والعناصر التي تنتمي إلى B ونرمز لها بالرمز $A \cup B$ وتقرأ A اتحاد B.

لدينا: $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ أو } x \in B\}$ ونكتب: $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ أو } x \in B)$

خصائص:

A و B و C أجزاء من مجموعة E، لدينا:

$$(1) \quad A \cap B \subset A \cup B \text{ و } B \subset A \cup B \text{ و } A \subset A \cup B$$

$$(2) \quad A \cup B = B \cup A \text{ و } A \cup A = A \text{ و } A \cup \emptyset = A$$

$$(3) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$(4) \quad A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$$

c - المتممة - فرق مجموعتين :

أ-المتممة:

ليكن A جزءا من مجموعة E.
مجموعة عناصر E التي لا تنتمي إلى A تسمى متممة A في E ونرمز لها بالرمز $\bar{A}$ أو C_E^A

لدينا: $C_E^A = \{x \in E / x \notin A\}$ و $\forall x \in E, x \notin \bar{A} \Leftrightarrow x \in A$

خصائص:

A و B جزآن من مجموعة E.

$$(1) \quad C_E^{\emptyset} = E \text{ و } C_E^E = \emptyset$$

$$(2) \quad A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$$

ب - فرق مجموعتين:

A و B جزآن من مجموعة E

نسمي فرق A و B في هذا الترتيب المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B. نرمز لهذه المجموعة بالرمز $A \setminus B$

ونكتب:

لدينا: $A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ و } x \notin B\}$ ونكتب: $(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ و } x \notin B)$

ملاحظة:

إذا كان $A \subset B$ فإن: $A \setminus B = \emptyset$ و $B \setminus A = C_B^A$

خاصية:

A و B جزآن من مجموعة E.

$$(1) \quad A \setminus B = A \cap C_E^B$$

$$(2) \quad A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$

d- خاصيات مشتركة :

خاصية 1: التوزيعية:

A و B و C أجزاء من مجموعة E.
لدينا: (1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

خاصية 2: قانون موركان (Lois de Morgan)

A و B جزآن من E، لدينا:
(1) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(3) الجداء الديكارتي:

تعريف:

E و F مجموعتان:
الجداء الديكارتي $E \times F$ للمجموعتين E و F هو مجموعة الأزواج (x, y) حيث $x \in E$ و $y \in F$

لدينا: $A \times B = \{(x, y) / x \in A \text{ و } y \in B\}$ و $(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \text{ و } y \in B$

ملاحظات:

- إذا كانت $E = F$ ، نرسم للمجموعة $E \times F$ بالرمز E^2 وتسمى المربع الديكارتي للمجموعة E.
- لتكن E و F مجموعتان: $E \times F = \emptyset \Leftrightarrow (E = \emptyset \text{ و } F = \emptyset)$

ملاحظة : عدد عناصر $A \times B$ هو عدد عناصر $B \times A$ لكن $A \times B \neq B \times A$

ملخص درس التطبيقات

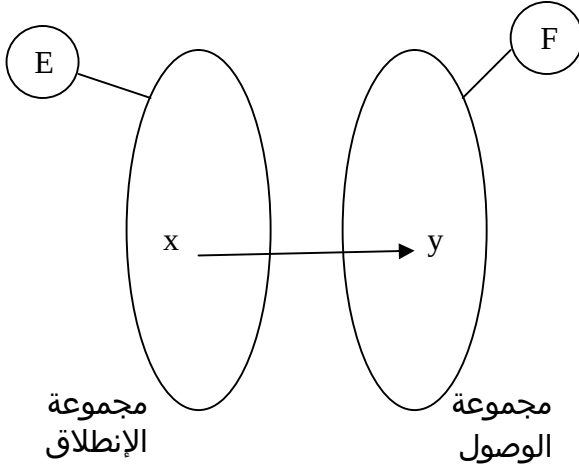
I- تعريف تطبيق - تساوي تطبيقين :

(1) تعريف تطبيق:

تعريف:

لنكن E و F مجموعتين غير فارغتين.

نسمة تطبيقا من E نحو F كل علاقة تربط كل عنصر x من E بعنصر y وحيد من F .



$$f : E \rightarrow F$$

$$x \rightarrow y = f(x)$$

إذا رمزنا لهذه العلاقة بالرمز f فإننا نكتب:

- المجموعة E تسمى مجموعة انطلاق التطبيق f .
- المجموعة F تسمى مجموعة وصول التطبيق f .
- العنصر y يسمى صورة العنصر x بالتطبيق f ونكتب $y = f(x)$
- العنصر x يسمى سابقا للعنصر y بالتطبيق f .
- المجموعة $\{(x, y) \in E \times F / y = f(x)\}$ تسمى المبيان الديكارتي للتطبيق f . ونرمز لها بالرمز $G(f)$

ملاحظة:

يمكن صياغة تعريف تطبيق كالتالي: $(f \text{ تطبيق من } E \text{ نحو } F) \Leftrightarrow (\forall x \in E)(\exists ! y \in F) : f(x) = y$

خاصية :

لنكن E و F مجموعتين غير فارغتين.

$$(f \text{ تطبيق من } E \text{ نحو } F) \Leftrightarrow [\forall (x, x') \in E^2 \ x = x' \Rightarrow f(x) = f(x')]$$

(2) تساوي تطبيقين:

تعريف:

f و g تطبيقان من E نحو F .

نقول إن f و g متساويان ونكتب $f = g$ إذا كان لكل x من E $f(x) = g(x)$

$$f \neq g \Leftrightarrow \exists x \in E \ f(x) \neq g(x)$$

II) قصور تطبيق - تمديد تطبيق:

تعريف 1

ليكن f تطبيقا من E نحو F و A جزء من E .

يسمى قصور التطبيق f على المجموعة A التطبيق: $g : A \rightarrow F$
 $x \rightarrow f(x)$

تعريف 2

ليكن f تطبيقا من E نحو F و G مجموعة حيث $E \subset G$.
 $g: G \rightarrow F$
 كل تطبيق: $x \rightarrow g(x)$ حيث: $\forall x \in E, g(x) = f(x)$
 يسمى تمديدا للتطبيق f إلى المجموعة G .

III (الصورة المباشرة والصورة العكسية لجزء بتطبيق: 1) صورة جزء بتطبيق:

تعريف

ليكن f تطبيقا من E نحو F و A جزء من E .
 نسمي صورة الجزء A بالتطبيق f ، مجموعة صور عناصر A بالتطبيق f . نرمز لها بالرمز $f(A)$.
 $f(A) \subset F$

$$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A / f(x) = y$$

$$f(A) = \{y \in F / y = f(x) \text{ و } x \in A\}$$

خاصيات

ليكن f تطبيقا من E نحو F و A و B جزئين من E .
 لدينا:

$$\begin{aligned} (1) \quad f(A) &\subset F \\ (2) \quad A \subset B &\Rightarrow f(A) \subset f(B) \\ (3) \quad f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B) \\ (4) \quad f(A \cap B) &\subset f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

2) الصورة العكسية لجزء بتطبيق:

تعريف

ليكن f تطبيقا من E نحو F و B جزء من F .
 مجموعة العناصر x من E بحيث $f(x) \in B$ ينتمي إلى B تسمى الصورة العكسية للجزء B ، نرمز لها بالرمز $f^{-1}(B)$.

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$$

و

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$$

لدينا:

ملاحظة:

ليكن f تطبيقا من E نحو F و B جزء من F .
 $f^{-1}(B) = \emptyset$ لا يعني أن $B = \emptyset$

خاصيات

ليكن f تطبيقا من E نحو F و C و D جزئين من E .
 لدينا:

$$\begin{aligned} (1) \quad f^{-1}(C) &\subset E \\ (2) \quad C \subset D &\Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D) \\ (3) \quad f^{-1}(C \cup D) &= f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \\ (4) \quad f^{-1}(C \cap D) &= f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \end{aligned}$$

IV (التطبيق التبايني- التطبيق الشمولي-التطبيق التقابلي:

1) التطبيق التبايني

تعريف:

ليكن f تطبيقا من E نحو F .
 نقول إن التطبيق f تبايني من E نحو F إذا كان كل عنصر y من F له سابق واحد على الأكثر في E .

بتعبير آخر: f^* تطبيق تبايني من E نحو F يعني $\boxed{\forall (x_1; x_2) \in E^2 : (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)}$

يعني $\boxed{\forall (x_1; x_2) \in E^2 : (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))}$

* f تطبيق غير تبايني من E نحو F يعني: $\boxed{\exists (x_1; x_2) \in E^2 : f(x_1) = f(x_2) \text{ و } x_1 \neq x_2}$

(2) التطبيق الشمولي:

تعريف

ليكن f تطبيقا من E نحو F. نقول إن التطبيق f شمولي من E نحو F إذا كان كل عنصر y من F يقبل سابقا على الأقل في E

بتعبير آخر: f^* تطبيق غير شمولي من E نحو F يعني $\boxed{(\forall y \in F) (\exists x \in E) / y = f(x)}$

f^* تطبيق غير شمولي من E نحو F يعني: $\boxed{(\exists y \in F) / (\forall x \in E) y \neq f(x)}$

خاصة

ليكن f تطبيقا من E نحو F. $f(E) = F \Leftrightarrow$ (التطبيق f شمولي من E نحو F)

(3) التطبيق التقابلي- التطبيق العكسي لتقابل:

تعريف

ليكن f تطبيقا من E نحو F. نقول إن التطبيق f تقابل من E نحو F إذا وفقط إذا كان التطبيق f تباينا وشموليا من E نحو F.

بتعبير آخر: التطبيق f تقابل من E نحو F إذا وفقط إذا كان كل عنصر من F يقبل سابقا وحيدا في E

$$\boxed{(\forall y \in F) (\exists! x \in E) / y = f(x)}$$

f تقابل من E نحو F يعني كذلك أن المعادلة $\boxed{f(x) = y}$ تقبل حلا وحيدا في E لكل y من F.

تعريف وخاصة

ليكن f تطبيقا تقابليا من E نحو F. التطبيق الذي يربط كل عنصر y من F بالعنصر الوحيد x من E بحيث: $y = f(x)$ تقابل من F نحو E ويسمى التطبيق العكسي للتقابل f . نرمز لهذا التطبيق بالرمز f^{-1} .

ولدينا:

$$\boxed{\begin{cases} f(x) = y \\ x \in E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in F \end{cases}}$$

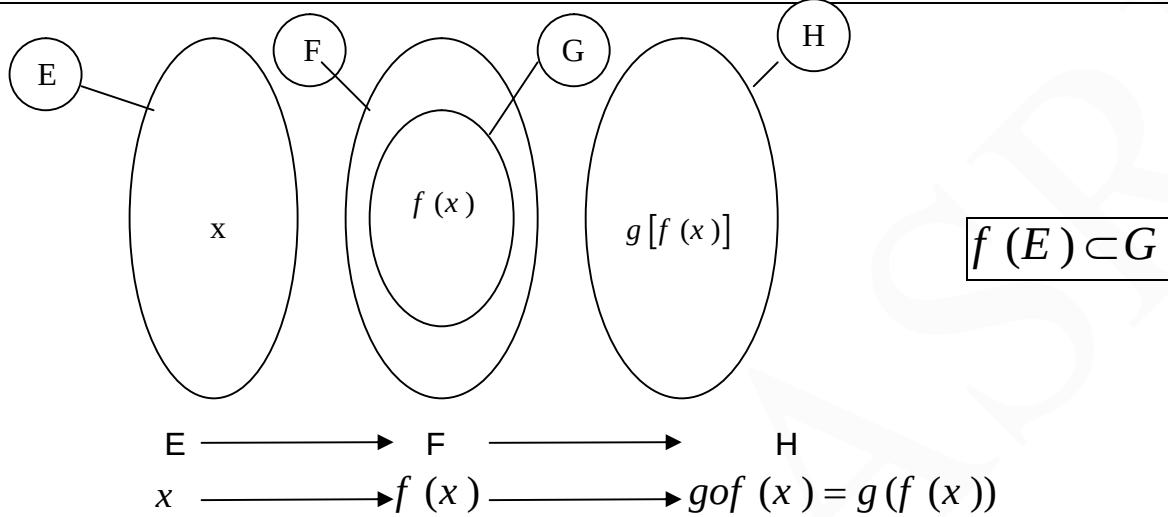
(V) مركب تطييقين

تعريف:

ليكن f تطييقا من E نحو F و g تطييقا من G نحو H بحيث $f(E) \subset G$.

نعرف تطييقا نرمز له بالرمز gof من E نحو H كما يلي : $\forall x \in E, gof(x) = g(f(x))$.

التطبيقات gof يسمى مركب التطييقين f و g في هذا الترتيب



خاصيات:

ليكن f تطييقا من E نحو F و g تطييقا من F نحو G .

-- إذا كان f و g تبائين فإن التطبيق gof تبائي من E نحو G

-- إذا كان f و g شموليين فإن التطبيق gof شمولي من E نحو G

-- إذا كان f و g تقابليين فإن التطبيق gof تقابل من E نحو G ولدينا: $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

-- إذا كان f تقابلا فإن: $\forall x \in F, fof^{-1}(x) = x$ و $\forall x \in E, f^{-1}of(x) = x$