

النمــــــــــــــــايات و الــــــــــــــــاتصال

I. اتصال دالة في x_0 :

1. f دالة متصلة في $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
2. f متصلة في $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$
3. f متصلة على مجال I إذا كانت متصلة على جميع نقاط I .
4. تكون f متصلة على المجال $[a; b]$ إذا كانت متصلة على مجال مفتوح $]a; b[$ ومتصلة على يمين a وعلى يسار النقطة b .
5. الدوال الحدودية متصلة على $\mathbb{R}$ والدوال الجذرية متصلة على حيز تعريفها .
6. الدوال $\sin$ و $\cos$ متصلة على $\mathbb{R}$ و tg متصلة على $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

II. العمليات على الدوال المتصلة

- إذا كانت f و g متصلة على مجال I فإن الدوال $f + g$ و $f \times g$ و κf متصلة على I مع $(\kappa \in \mathbb{R})$ وكذلك $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلة على I مع $(g \neq 0)$
- إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على مجال J حيث $f(I) \subset J$ فإن الدالة $g \circ f$ متصلة على مجال I
- إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ فإن الدالة المعرفة بما يلي :
$$\begin{cases} g(x) = f(x) \\ g(x_0) = \ell \end{cases}$$
 متصلة في x_0
ويسمى التمديد بالاتصال للدالة f في x_0 ولدينا $D_g = D_f \cup \{x_0\}$



III. دالة الجزء الصحيح :

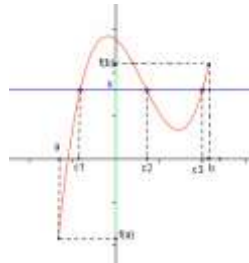
- دالة الجزء الصحيح هي الدالة التي تربط كل عنصر x من $\mathbb{R}$ بالعدد الصحيح النسبي n الذي يحقق $n \leq x \leq n+1$ نرسم لصورة x بهذه الدالة بالرمز $E(x)$
 $\forall n \in \mathbb{Z}$. دالة الجزء الصحيح متصلة على يمين n وغير متصلة على اليسار في n .
ادن دالة الجزء الصحيح غير متصلة في n .

الدالة العكسية

IV. مبرهنة القيم الوسطية :

f دالة متصلة على المجال $[a; b]$

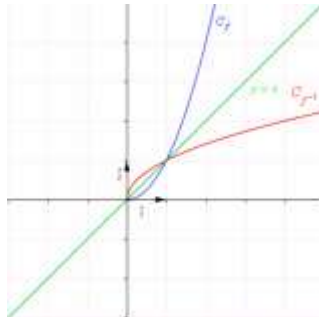
1. k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ $\Leftrightarrow \exists c \in [a; b] \quad f(c) = k$



2. $f(a) \cdot f(b) < 0 \Leftrightarrow$ المعادلة $f(x) = 0$ لها حل في المجال $]a; b[$

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على I فإن:

1. f تقبل دالة عكسية من المجال I نحو $f(I)$.
2. الدالة f^{-1} لها نفس تغيرات الدالة f على المجال $f(I)$
3. f^{-1} متصلة على $f(I)$
4. (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ متماثلان بالنسبة للمنصف الأول للمعلم $(y = x)$



V. خصائص

f متصلة ورتيبة قطعاً على المجال I

$$1. \quad f^{-1}(x) = y \text{ و } x = f(y) \Leftrightarrow x \in f(I) \text{ و } y \in I$$

$$2. \quad f \circ f^{-1}(x) = x \quad \forall x \in f(I)$$

$$\text{و } (\forall x \in I) f^{-1} \circ f(x) = x$$

$$3. \quad M^{-1}(y; x) \in (C_{f^{-1}}) \Leftrightarrow M(x; y) \in (C_f)$$

VI. تحديد صورة مجال :

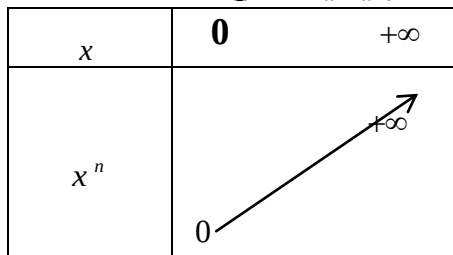
- لتحديد صورة المجال يجب التمييز بين تزايدية و تناقصية الدالة ومراعاة للمجال المغلق والمفتوح :

المجال	f تزايدية قطعاً	f تناقصية قطعاً
$[ab]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$]ab]$	$] \lim_{a^+} f(x); f(b)]$	$[f(b); \lim_{a^+} f(x) [$
$]ab[$	$] \lim_{a^+} f(x); \lim_{b^-} f(x) [$	$] \lim_{b^-} f(x); \lim_{a^+} f(x) [$
$[a, +\infty[$	$[f(a); \lim_{+\infty} f(x) [$	$] \lim_{+\infty} f(x); f(a)]$
$] -\infty, a[$	$] \lim_{-\infty} f(x); \lim_{a^-} f(x) [$	$] \lim_{a^-} f(x); \lim_{-\infty} f(x) [$
$] -\infty, +\infty[$	$] \lim_{-\infty} f(x); \lim_{+\infty} f(x) [$	$] \lim_{+\infty} f(x); \lim_{-\infty} f(x) [$

VII. دالة الجذر من الرتبة n

$$\sqrt[n]{x} \quad x \in \mathbb{R}^+; n \in \mathbb{N}^*$$

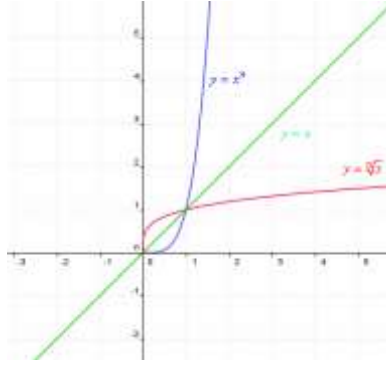
$$f(x) = x^n \quad \mathbb{R}^+ \text{ دالة متصلة وتزايدية على } \mathbb{R}^+$$



- x^n تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$ وتسمى دالة الجذر من الرتبة n ويرمز لها بـ $\sqrt[n]{x}$



في معلم متعامد ممنظم منحني الدالة $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ مماثل لمنحني الدالة $x \rightarrow x^n$ بالنسبة
للمنصف الأول للمعلم



• إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ و $\ell > 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell}$

• إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$

$$(\sqrt[n]{x})^n = x \quad ; \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{و} \quad \sqrt[n]{x^n} = x$$

$$\begin{cases} y = \sqrt[n]{x} \\ x \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^n \\ y \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x > y \quad ; \forall (x; y) \in \mathbb{R}^+ \quad \text{و}$$

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$$

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \text{و}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m} \quad \text{و}$$

$$\sqrt[n]{0} = 0 \quad \text{و} \quad \sqrt[n]{1} = 1$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

• القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعاً :

• تمديد خصائص المتعلقة بالقوى الصحيحة النسبية إلى القوى الجذرية.

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad \text{و}$$

$$a^n \times b^n = (ab)^n$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

