

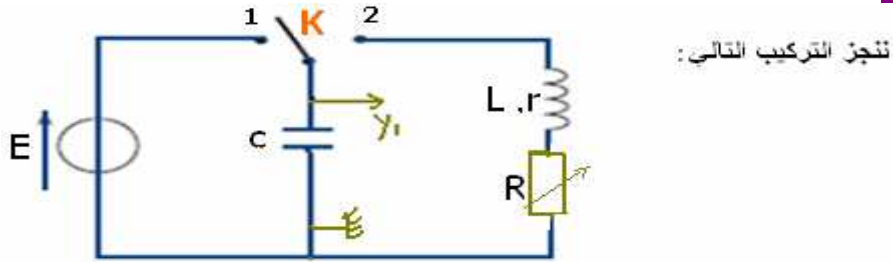
التذبذبات الحرة في دائرة RLC متواليّة

(I) التذبذبات الحرة في دائرة RLC على التوالي:

(1) تعريف:

الدائرة RLC على التوالي هي دائرة تتكون من موصل أومي مقاومته R ومكثف سعته C ووشية مقاومتها r ومعامل تحريضها L . تكون التذبذبات حرة في دائرة RLC عندما لا يتوفر فيها أي مصدر للطاقة ماعدا الطاقة المخزونة في المكثف المشحون بدنيا : حيث يتفرغ المكثف في الوشية. (أي أن الدائرة لا تشتمل على أي مولد للتيار الكهربائي).

(2) تفريغ مكثف في وشية:



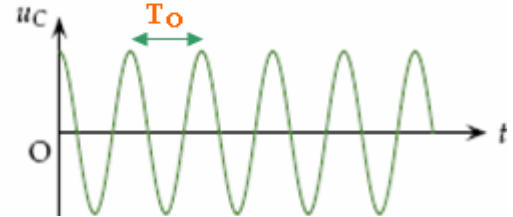
، ونعاين على شاشة راسم التذبذب التوتر بين مربطي المكثف. نضع قاطع التيار في الموضع 1 لمدة زمنية كافية لشحن المكثف ثم نؤرجحه إلى الموضع 2 ، ونعاين على شاشة راسم التذبذب التوتر بين مربطي المكثف . نعيد التجربة عدة مرات برفع قيمة المقاومة R فنحصل على أنظمة الخمود.

(3) أنظمة الخمود:

عند وضع قاطع التيار في الموضع بين 2، شحنة المكثف تتذبذب بين لبوسيه ، ونظرا لوجود المقاومة في الدائرة ، تتناقص الشحنة وبالتالي يتناقص التوتر المطبق مربطي المكثف ، نقول أن التذبذبات مخمدة . ونظرا لغياب المولد في الدائرة ، فإن التذبذبات حرة ومخمدة (خلال التذبذب جزء من الطاقة يتبدد على مستوى الموصل الأومي على شكل طاقة حرارية بمفعول جول).

وحسب قيمة مقاومة الدائرة نميز ثلاث أنظمة:

*نظام دوري: عندما تكون المقاومة الكلية للدائرة منعدمة، تكون التذبذبات حرة وغير مخمدة. (في هذه الحالة تنحفظ الطاقة الكلية للدائرة).

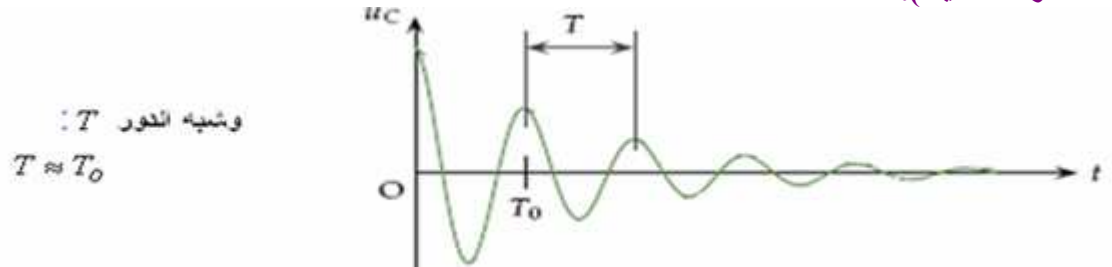


وهذه حالة يصعب تحقيقها تجريبيا ،

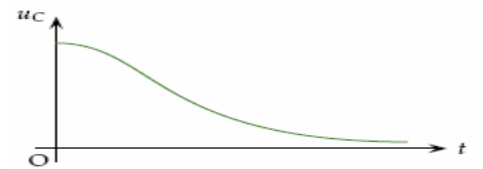
لأنه كيفما كانت الوشية فإن مقاومتها غير مهملة

تتميز بالدور الخاص : T_0

*نظام شبه دوري: عندما تكون المقاومة الكلية للدائرة صغيرة، التذبذبات حرة ومخمدة، ففي هذه الحالة يتناقص وسعها إلى أن يندم. (وهي حالة الخمود الضعيف).

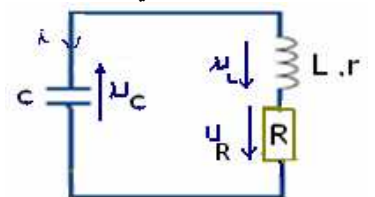


*نظام لادوري: المقاومة كبيرة ، في هذه الحالة تختفي التذبذبات لأن الخمود قوي. يفقد المكثف شحنته لكن بعد مدة زمنية طويلة دون تذبذب.



(4) المعادلة التفاضلية لدائرة RLC.

تعتبر التركيب التالي:



حسب قانون إضافية التوترات: $u_C + u_R + u_L = 0$

$$u_R = R.i \quad \text{مع} \quad i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad u_R = R.C \frac{du_C}{dt}$$

$$u_L = r.i + L \frac{di}{dt} \text{ و}$$

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + R_t c \frac{du_c}{dt} + u_c = 0 \Leftrightarrow$$

$$u_c + (R+r)c \frac{du_c}{dt} + LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} = 0 \quad \text{إن:}$$

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R_t}{L} \cdot \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot u_c = 0$$

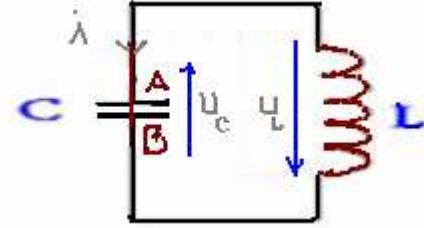
ونحصل على المعادلة التفاضلية لدائرة متوالية **RLC** :

المقدار : $\frac{R_t}{L} \cdot \frac{du_c}{dt}$ ناتج عن ظاهرة الخمود (بانعدامه يزول الخمود).

II) التذبذبات غير المخمدة في دائرة مثالية LC.

1) دراسة الدارة المثالية LC

(أ) التركيب : تعتبر التركيب التالي المكون من مكثف سعته C ، ووشية معامل تحريضها L ومقاومتها منعدمة. هذه دائرة مثالية لأنه كيفما كانت الوشية فإن مقاومتها غير مهمة وبالتالي فهذا تركيب مثالي يصعب تحقيقه تجريبيا.



ب) المعادلة التفاضلية:

حسب قانون إضافية التوترات نجد: $u_c + u_L = 0$ (1)

$$u_L = L.c. \frac{d^2 u_c}{dt^2}$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} \quad \text{مع: } i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(cu_c)}{dt} = c \frac{du_c}{dt} \quad \text{إن:}$$

و (1) تصبح كما يلي : $\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{L.c} \cdot u_c = 0$ (2) وهي المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر u_c بين مربطي المكثف.

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{L.c} \cdot q = 0$$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{c} = 0 \quad \text{أي:}$$

ملحوظة: بتعويض u_c ب: $\frac{q}{c}$ ، العلاقة (1) تصبح : $u_L + u_c = 0$: وهي المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة الكهربائية q .

ج) حل المعادلة التفاضلية:

حل المعادلة التفاضلية: $\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{L.c} u_c = 0$ (a) ، عبارة عن دالة جيبيه يكتب كما يلي :

$$\text{مع : } \omega_o = \frac{2\pi}{T_o} \quad \text{النض الخاص.}$$

$$u_c(t) = U_m \cos(\omega_o t + \varphi)$$

ω_o : النض الخاص للدائرة المتذبذبة LC ، وحدته rad/s .

U_m : وسع التذبذبات وهي القيمة القصوى للتوتر $u_{c(t)}$.

$(\frac{2\pi}{T} t + \varphi)$: طور التوتر عند اللحظة ذات التاريخ t .

φ : الطور عند أصل التواريخ. (بالراديان rad).

T_o : الدور الخاص للتذبذبات.

الثابتين U_m و φ تحددان باستعمال الشروط البدنية للتوتر u_c وشدة التيار الكهربائي i .

2) تحديد تعبير الدور الخاص: لدينا: $u_c(t) = U_m \cdot \cos(\omega_o \cdot t + \varphi)$

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} = -U_m \cdot \omega_o^2 \cdot \cos(\omega_o \cdot t + \varphi) = -\omega_o^2 \times u_c(t) \Leftrightarrow$$

$$\frac{du_c}{dt} = -U_m \cdot \omega_o \cdot \sin(\omega_o \cdot t + \varphi) \quad \text{إن:}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية (a) نجد : $-\omega_o^2 \cdot u_c + \frac{1}{L.C} \cdot u_c = 0 \Leftrightarrow \omega_o^2 = \frac{1}{L.C}$ **النض الخاص** $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$

$$\text{ولدينا : } T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} \quad \text{إن: } T_o = 2\pi\sqrt{LC}$$

لنستعمل معادلة الأبعاد لكي نتأكد من كون وحدة الدور في العلاقة السابقة هي الثانية.

$$[L][c] = \frac{[u][t]}{[i]} \times \frac{[i][t]}{[u]} = [t]^2 \Leftrightarrow \begin{cases} [c] = [i][u]^{-1}[t] \Leftrightarrow c = \frac{i}{\frac{du_c}{dt}} \Leftrightarrow i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(cu_c)}{dt} = c \cdot \frac{du_c}{dt} \\ [L] = [u][i]^{-1}[t] \Leftrightarrow L = \frac{u_L}{\frac{di}{dt}} \Leftrightarrow u_L = L \frac{di}{dt} \text{ ولدينا:} \end{cases}$$

إن وحدة T_O هي: وحدة الزمن ، أي الثانية (s)

أو بطريقة أخرى: من خلال تعريف ثابتة الزمن لكل من ثنائي القطب RC و RL : $\tau = RC$ و $\tau = \frac{L}{R}$

نعلم أن الجداء RC والنسبة $\frac{L}{R}$ لهما بعد الزمن. $[RC] = [T]$ و $[\frac{L}{R}] = [T]$ $\Leftrightarrow [LC] = [\frac{L}{R}] \times [RC] = [T]^2$

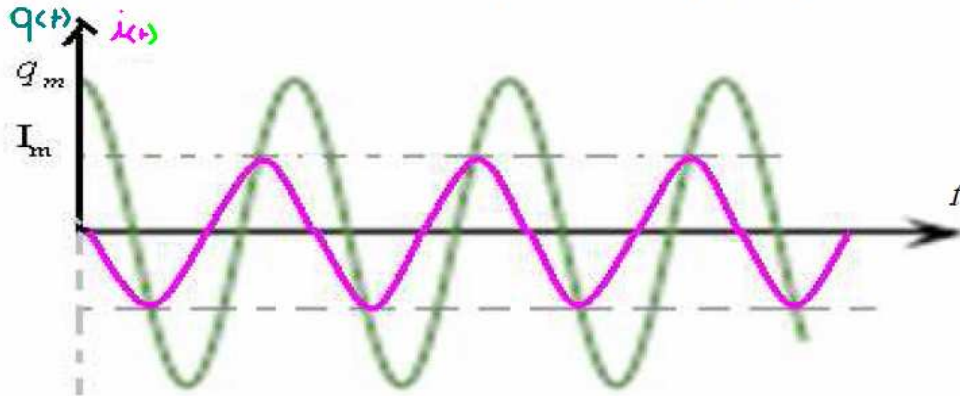
(3) تعبير الشحنة q وشدة التيار $i(t)$.

* شحنة المكثف: $q(t) = c \times u(t) = c \cdot U_m \cos(\omega_o \cdot t + \varphi) = q_m \cos(\omega_o \cdot t + \varphi)$ مع: $q_m = c \cdot U_m$

* شدة التيار الكهربائي: $i(t) = \frac{dq}{dt} = -q_m \cdot \omega_o \sin(\omega_o t + \varphi) = -I_m \sin(\omega_o t + \varphi) = I_m \cdot \cos(\omega_o t + \varphi + \frac{\pi}{2})$ مع: $I_m = q_m \omega_o$

في حالة: $\varphi = 0$: $q(t) = q_m \cos \frac{2\pi}{T_o} t$ و $i(t) = I_m \cdot \cos(\frac{2\pi}{T_o} t + \frac{\pi}{2})$

ومنه يتضح أن الدالتين $q(t)$ و $u(t)$ على تربع في الطور عندما تكون إحداها قصوى أو دنوية تكون الأخرى منعدمة .



(III) انتقال الطاقة بين المكثف والوشيعة:

1) تعبير الطاقة الكلية للدائرة المثالية LC .

الطاقة الكلية المخزونة في الدائرة المثالية LC تساوي في كل لحظة مجموع الطاقة الكهربائية المخزونة في المكثف ξ_e والطاقة المغناطيسية ξ_m المخزونة في الوشيعة .

$$\xi_t = \xi_e + \xi_m = \frac{1}{2} \frac{q^2}{c} + \frac{1}{2} L i^2$$

لدينا: $q = q_m \cdot \cos(\omega_o \cdot t + \varphi)$ إذن: $i = \frac{dq}{dt} = -q_m \cdot \omega_o \cdot \sin(\omega_o \cdot t + \varphi)$ $\Leftrightarrow I_m = q_m \cdot \omega_o$

وتعبر الطاقة الكهربائية المخزونة في المكثف يكتب كما يلي :

$$\begin{aligned} \xi_t &= \xi_e + \xi_m = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2C} \cdot q_m^2 \cdot \cos^2(\omega_o \cdot t + \varphi) + \frac{1}{2} \cdot L \cdot q_m^2 \cdot \omega_o^2 \sin^2(\omega_o \cdot t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2C} \cdot q_m^2 \cdot \cos^2(\omega_o \cdot t + \varphi) + \frac{1}{2} \cdot L \cdot q_m^2 \cdot \frac{1}{LC} \cdot \sin^2(\omega_o \cdot t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{q_m^2}{C} \end{aligned}$$

وبما أن: $I_m = q_m \cdot \omega_o$ $\Leftrightarrow q_m^2 = \frac{I_m^2}{\omega_o^2}$ مع: $\omega_o^2 = \frac{1}{LC}$ $\Leftrightarrow q_m^2 = I_m^2 \cdot LC$

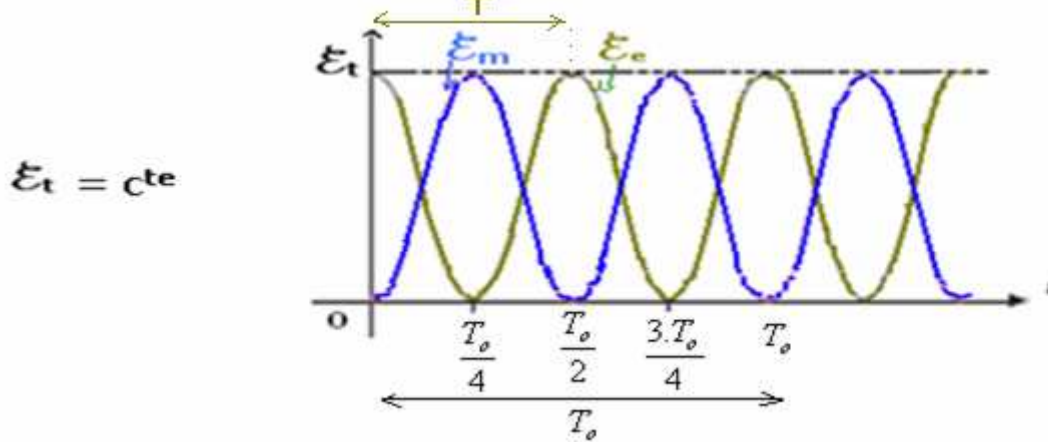
وبالتعويض في العلاقة السابقة نجد: $\xi_t = \frac{1}{2} \times \frac{q_m^2}{C} = \frac{1}{2} \times \frac{I_m^2 \cdot LC}{C} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_m^2$

الطاقة الكلية للدائرة المثالية LC ثابتة.

$$\xi_T = \frac{1}{2} \times \frac{q_m^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_m^2$$

الطاقة الكلية لدائرة مثالية LC :

استنتاج: خلال التذبذبات غير المخمدة تتحول الطاقة الكهربائية في المكثف إلى طاقة مغناطيسية في الوشعة والعكس.



ملحوظة: لدينا : $q = q_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$ عند اللحظة $t=0$ ، $q = q_m \cdot \cos \varphi \Leftrightarrow \cos \varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi = 0$. إذن :

ومنه : $q = q_m \cdot \cos \omega_0 \cdot t$ مع : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ إذن الطاقة الكهربائية للمكثف : $\xi_e = \frac{q_m^2}{2 \cdot C} \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t\right)$

t	0	$T_0/4$	$T_0/2$	$3 \cdot T_0/4$	T_0
E_e	$\frac{q_m^2}{2 \cdot C}$	0	$\frac{q_m^2}{2 \cdot C}$	0	$\frac{q_m^2}{2 \cdot C}$

$$T = \frac{T_0}{2}$$

في دائرة مثالية LC دور التبادل الطاقي بين المكثف والوشعة يساوي نصف الدور الخاص للتذبذبات

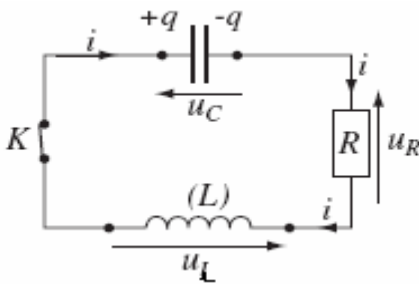
2) طاقة الدائرة المتوالية RLC .

يمكن التعبير عن طاقة الدائرة المتوالية RLC في لحظة معينة كما يلي : $\xi_t = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2$

لدينا حسب قانون إضافية التوترات : $u_L + u_R + u_C = 0$

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = -Ri \quad (1) \quad \Leftrightarrow \quad L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0 \quad \text{أي :}$$

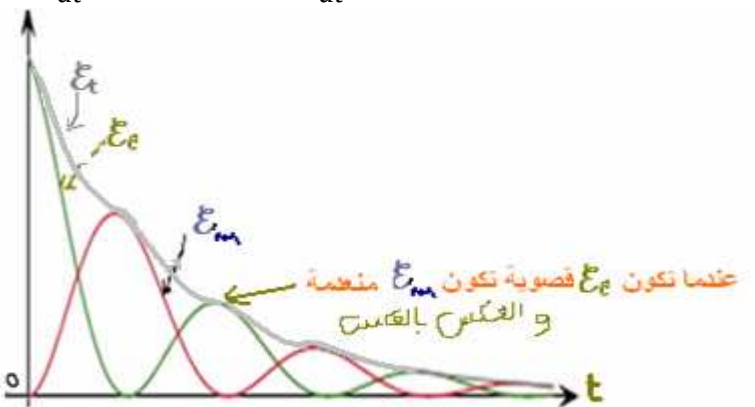
من خلال تعبير الطاقة الكلية للدائرة : $\xi_t = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2$



$$\frac{d\xi_t}{dt} = \frac{q}{C} \cdot \frac{dq}{dt} + Li \frac{di}{dt} = i \cdot \left[\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} \right]$$

إذن :

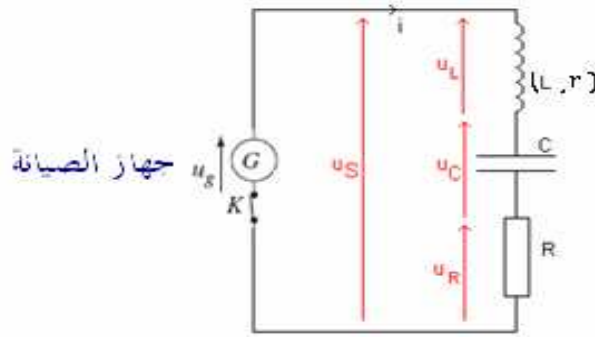
باعتبار العلاقة (1) $\frac{d\xi_t}{dt} = -Ri^2 < 0 \Leftrightarrow$ إذن الطاقة تناقصية ويعزى ذلك إلى وجود المقاومة.



تناقص الطاقة الكلية للدائرة تدريجيا بسبب مفعول جول.

(IV) صيانة التذبذبات:

يمكن صيانة التذبذبات في دائرة متوالية RLC، ويتم ذلك باستعمال مولد G يزود الدائرة بطاقة تعوض الطاقة المبددة بمفعول جول على مستوى المقاومة الكلية للدائرة.



المولد G يزود الدارة بتوتر يتناسب اطرادا مع شدة التيار الكهربائي الذي يعبر الدارة. $u_g = R_o \cdot i$ (مع $R_o = R + r$) وهو يتصرف كمقاومة سالبة.

بتطبيق قانون إضافية التوترات : $u_g = u_R + u_c + u_L$

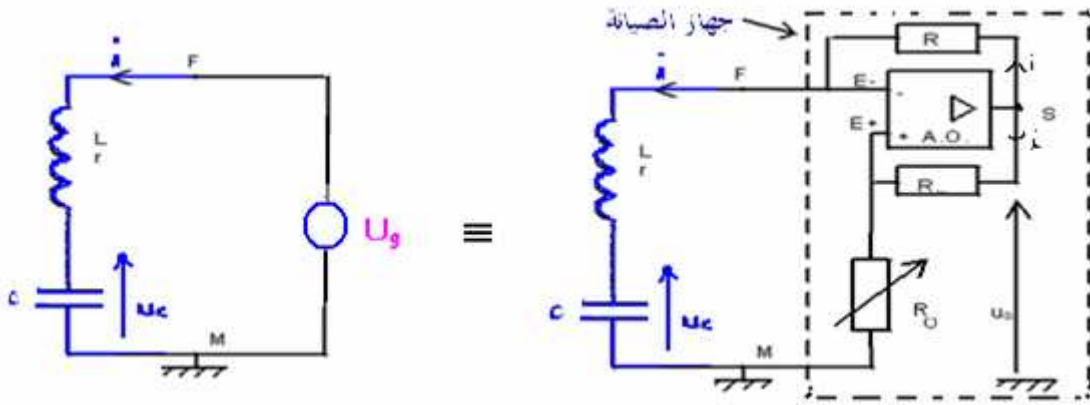
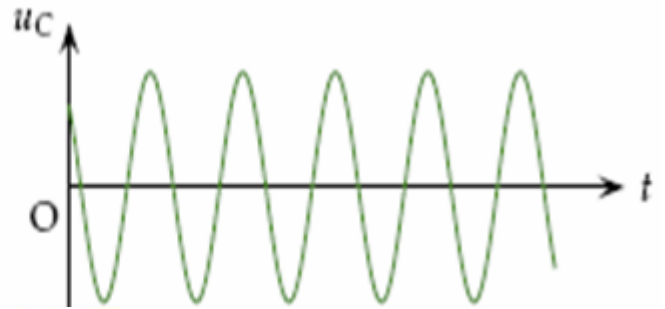
$$(1) \quad L \frac{di}{dt} + u_c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (R + r)i = R \cdot i + u_c + r \cdot i + L \frac{di}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = c \frac{d^2 u_c}{dt^2} \quad \text{فإن} \quad i = \frac{dq}{dt} = c \frac{du_c}{dt}$$

إذن (1) تصبح: التذبذبات $Lc \frac{d^2 u_c}{dt^2} + u_c = 0$ وهي المعادلة التفاضلية المميزة للدارة المثالية ذات المقاومة المهملة ، وبذلك تصبح مصانة.

دورها : $T = T_o$

$$T_o = 2\pi\sqrt{LC}$$



SBIRO Abdelkrim

Lycée Agricole Oulad Taima email : sbiabdou@yahoo.fr

Pour toutes observation contactez mon email

المملكة المغربية

لا تنسونا بأدعيتكم الصالحة
والله ولي التوفيق.