

Chapitre 3

Barycentre dans le plan

On se place dans le plan ou dans l'espace.

I/ Barycentre de deux points

a) Définition

Théorème et définition

Soient A et B deux points quelconques, α et β deux réels.
 Il existe un unique point G du plan tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\alpha + \beta \neq 0$.
 Ce point est appelé barycentre du système de points pondérés $(A, \alpha); (B, \beta)$. On note $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$.

Démonstration

Quels que soient α et β :

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} &\iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0} \iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \\ &\iff (\alpha + \beta)\overrightarrow{GA} = -\beta\overrightarrow{AB} \iff (\alpha + \beta)\overrightarrow{AG} = \beta\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

1/ Si $\alpha + \beta \neq 0$ alors l'équation équivaut à $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$.

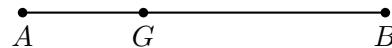
Le point G existe et est unique.

2/ Si $\alpha + \beta = 0$ alors l'équation équivaut à $\beta\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.

Cette équation n'admet pas de solution si $A \neq B$ et $\beta \neq 0$ et en admet une infinité si $A = B$ ou $\beta = 0$.

Exemple : Deux points A et B étant donnés, placer $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1)\}$.

$$\begin{aligned}G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1)\} \\ &\iff 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \\ &\iff 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \\ &\iff 3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} \\ &\iff \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$



b) Propriétés

Dans tout le paragraphe, A et B sont deux points quelconques, α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$ et $G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

Homogénéité

Propriété

Soit k un réel. Si $k \neq 0$ alors $G = \text{Bar} \{(A, k\alpha); (B, k\beta)\}$.

Démonstration

Si $k \neq 0$ alors :

$$\begin{aligned} G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta)\} &\iff \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0} \iff k(\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB}) = k \vec{0} \\ &\iff k\alpha \overrightarrow{GA} + k\beta \overrightarrow{GB} = \vec{0} \iff G = \text{Bar} \{(A, k\alpha); (B, k\beta)\} \end{aligned}$$

Exemple : Démontrer que l'on peut exprimer G comme barycentre de A et B de telle façon que la somme des coefficients soit égale à 1.

Si $G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ alors $G = \text{Bar} \left\{ \left(A, \frac{1}{\alpha + \beta} \alpha \right); \left(B, \frac{1}{\alpha + \beta} \beta \right) \right\}$ car $\alpha + \beta \neq 0$.

On a ainsi $G = \text{Bar} \left\{ \left(A, \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right); \left(B, \frac{\beta}{\alpha + \beta} \right) \right\}$ avec $\frac{\alpha}{\alpha + \beta} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} = 1$

Position du barycentre

Propriété

Si A et B sont distincts alors $G \in (AB)$. Autrement dit, A , B et G sont alignés.
Si, de plus, α et β sont de même signe alors $G \in [AB]$.

Démonstration

$$G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta)\} \iff \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont donc colinéaires et G , A et B sont alignés.

De plus, on a obtenu au cours de la première démonstration le résultat suivant :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$$

or si α et β sont de même signe alors $\frac{\beta}{\alpha + \beta}$ est positif et inférieur à 1.

Ainsi $G \in [AB]$.

Propriété

Réciproquement, si $A \neq B$, tout point de la droite (AB) est le barycentre de A et B affectés de coefficients bien choisis.

Démonstration

Si $M \in (AB)$ alors $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB} &\iff \overrightarrow{AM} - k \overrightarrow{AB} = \vec{0} \iff \overrightarrow{AM} - k(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) = \vec{0} \\ &\iff \overrightarrow{AM} - k \overrightarrow{AM} - k \overrightarrow{MB} = \vec{0} \iff (k - 1) \overrightarrow{MA} - k \overrightarrow{MB} = \vec{0} \end{aligned}$$

De plus, $k - 1 - k = -1 \neq 0$ donc $M = \text{Bar} \{(A, k - 1); (B, -k)\}$.

Isobarycentre

Propriété

Si $\alpha = \beta$, alors G est appelé isobarycentre de A et B . G est alors le milieu du segment $[AB]$.

Démonstration immédiate

Réduction vectorielle

Propriété

Quel que soit le point M , $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG}$.

Démonstration

Quel que soit le point M ,

$$\begin{aligned} \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} &= \alpha(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + \beta(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) = \alpha \overrightarrow{MG} + \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{MG} + \beta \overrightarrow{GB} \\ &= (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG} + \underbrace{\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB}}_{=\vec{0}} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG} \end{aligned}$$

Exemple : Soit $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 5)\}$. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

L'égalité précédente pour $M = A$ donne $5\overrightarrow{AB} = 7\overrightarrow{AG}$. On a donc $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$.

c) Coordonnées du barycentre

Propriété

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

Si $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ alors $G\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}; \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}\right)$

Dans un repère de l'espace, il suffit de faire le même calcul sur la troisième coordonnée.

Démonstration

Quel que soit le point M , on a $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG}$.

Cette égalité est donc valable en particulier pour $M = O$.

On a donc $\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{OG}$ soit $\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{OB}$

Les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$ sont $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et les coordonnées de $\overrightarrow{OB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$.

On en déduit que les coordonnées de $\overrightarrow{OG}$ sont $\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} x_A + \frac{\beta}{\alpha + \beta} x_B \\ \frac{\alpha}{\alpha + \beta} y_A + \frac{\beta}{\alpha + \beta} y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \\ \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \end{pmatrix}$.

Exemple : Dans un repère du plan, on a $A(3; -2)$ et $B(-1; 4)$. Déterminer les coordonnées de G barycentre de $(A, 2); (B, 3)$.

On a :

$$\begin{cases} x_G = \frac{2 \times x_A + 3 \times x_B}{2 + 3} = \frac{2 \times 3 + 3 \times (-1)}{5} = \frac{2}{5} \\ y_G = \frac{2 \times y_A + 3 \times y_B}{2 + 3} = \frac{2 \times (-2) + 3 \times 4}{5} = \frac{8}{5} \end{cases}$$

Ainsi $G\left(\frac{2}{5}; \frac{8}{5}\right)$

II/ Barycentre de trois points

Les définitions et propriétés du paragraphe précédent s'étendent au cas de trois points pondérés.

a) Définition

Théorème et définition

Soient A , B et C trois points quelconques, α , β et γ trois réels.

Il existe un unique point G du plan tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ si et seulement si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

Ce point est appelé barycentre du système de points pondérés $(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)$. On note $G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

Démonstration

Quels que soient α , β et γ :

$$\begin{aligned} \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} &\iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + \gamma(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \\ &\iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{GA} + \gamma\overrightarrow{AC} = \vec{0} \\ &\iff (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{GA} = -\beta\overrightarrow{AB} - \gamma\overrightarrow{AC} \\ &\iff (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{AG} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

1/ Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ alors l'équation équivaut à

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AC}$$

Le point G existe et est unique.

2/ Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$ alors l'équation équivaut à $\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Cette équation n'admet pas de solution si $\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ et en admet une infinité si $\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

b) Associativité du barycentre

Propriété

Soient A , B et C trois points, α , β et γ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta \neq 0$.

$$\text{Si } \begin{cases} G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} \\ H = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta)\} \end{cases} \quad \text{alors} \quad G = \text{Bar} \{(H, \alpha + \beta); (C, \gamma)\}$$

Démonstration

Supposons que $\begin{cases} G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} \\ H = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta)\} \end{cases}$

On a alors :

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)\overrightarrow{GH} + \gamma\overrightarrow{GC} &= \alpha\overrightarrow{GH} + \beta\overrightarrow{GH} + \gamma\overrightarrow{GC} = \alpha\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{AH} + \beta\overrightarrow{GB} + \beta\overrightarrow{BH} + \gamma\overrightarrow{GC} \\ &= \underbrace{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\alpha\overrightarrow{AH} + \beta\overrightarrow{BH}}_{=\vec{0}} = \vec{0} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$G = \text{Bar} \{(H, \alpha + \beta); (C, \gamma)\}$$

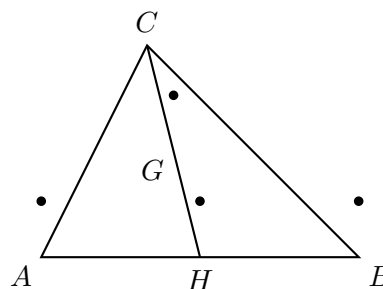
Exemple : Trois points A , B et C étant donnés, placer $G = \text{Bar} \{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$.

Posons $H = \text{Bar} \{(A, 1); (B, 1)\}$. H est donc le milieu de $[AB]$.

D'après la propriété d'associativité,

$$G = \text{Bar} \{(H, 2); (C, 2)\}.$$

G est donc le milieu de $[CH]$.

**c) Propriétés**

Dans tout le paragraphe, A , B et C sont trois points quelconques, α , β et γ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

Homogénéité**Propriété**

Soit k un réel. Si $k \neq 0$ alors $G = \text{Bar} \{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\}$.

Démonstration

Si $k \neq 0$ alors :

$$\begin{aligned} G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} &\iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ &\iff k(\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC}) = k\vec{0} \\ &\iff k\alpha\overrightarrow{GA} + k\beta\overrightarrow{GB} + k\gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ &\iff G = \text{Bar} \{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\} \end{aligned}$$

Position du barycentre**Propriété**

Si A , B et C ne sont pas alignés alors $G \in (ABC)$. Autrement dit, A , B , C et G sont coplanaires.

Démonstration

$$G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} \iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ sont donc coplanaires. Ainsi les points A , B , C et G sont coplanaires.

Propriété

Réciproquement, si A , B et C ne sont pas alignés, alors tout point du plan (ABC) est le barycentre de A , B et C affectés de coefficients bien choisis.

Démonstration

Si $M \in (ABC)$ alors il existe des réels k et k' tel que :

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{MB} + k'\overrightarrow{AM} + k'\overrightarrow{MC}$$

On a alors $(1 - k - k')\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} + k'\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

donc $M = \text{Bar} \{(A, 1 - k - k'); (B, k); (C, k')\}$.

Isobarycentre**Propriété**

Si $\alpha = \beta = \gamma$, alors G est appelé isobarycentre de A , B et C . G est alors le centre de gravité du triangle ABC .

Démonstration

Soient I le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[AC]$.

On a alors $I = \text{Bar} \{(B, 1); (C, 1)\}$ et $J = \text{Bar} \{(A, 1); (C, 1)\}$.

D'après la propriété d'associativité, on a, d'une part, $G = \text{Bar} \{(I, 2); (A, 1)\}$ donc

$G \in (AI)$ et, d'autre part, $G = \text{Bar} \{(J, 2); (B, 1)\}$ donc $G \in (BJ)$.

G appartient donc à deux médianes de ABC .

G est le centre de gravité de ABC .

Réduction vectorielle**Propriété**

Quel que soit le point M , $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$.

Démonstration

Quel que soit le point M ,

$$\begin{aligned} \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} &= \alpha(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + \beta(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + \gamma(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \\ &= \alpha\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{MG} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{MG} + \gamma\overrightarrow{GC} \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG} + \underbrace{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC}}_{=\vec{0}} \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG} \end{aligned}$$

d) Coordonnées du barycentre**Propriété**

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Soit $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$.

Si $G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ alors $G\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}; \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}\right)$

Dans un repère de l'espace, il suffit de faire le même calcul sur la troisième coordonnée.

La démonstration est identique au cas de deux points.

Exemple : Dans un repère du plan, on a $A(2; -1)$, $B(0; 3)$ et $C(-2; 0)$. Déterminer les coordonnées de G barycentre de $(A, 1); (B, 3); (C, -2)$.

On a :

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + 3 \times x_B - 2 \times x_C}{1 + 3 - 2} = \frac{2 + 3 \times 0 - 2 \times (-2)}{2} = 3 \\ y_G = \frac{y_A + 3 \times y_B - 2 \times y_C}{1 + 3 - 2} = \frac{-1 + 3 \times 3 - 2 \times 0}{2} = 4 \end{cases}$$

Ainsi $G(3; 4)$

III/ Barycentre d'un nombre quelconque de points

Toutes les

définitions et propriétés précédentes se généralisent à n points pondérés.

- Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n points et $a_1, a_2, \dots, a_n$ n réels.

Il existe un unique point G tel que $a_1 \overrightarrow{GA_1} + a_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$ si et seulement si $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$.

Ce point est appelé barycentre des n points pondérés $(A_1, a_1); (A_2, a_2); \dots; (A_n, a_n)$.

- Règle d'associativité :

Pour trouver le barycentre G , de n points, lorsque $n \geq 3$, on peut remplacer p points, pris parmi les n points, par leur barycentre (s'il existe) affecté de la somme de leurs coefficients.

- Soit $k \neq 0$.

$G = \text{Bar}(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n) \iff G = \text{Bar}(A_1, ka_1), (A_2, ka_2), \dots, (A_n, ka_n)$.

Autrement dit, on ne change pas le barycentre en changeant les coefficients par des coefficients proportionnels.

- Si $a_1 = a_2 = \dots = a_n \neq 0$ alors G est appelé isobarycentre des n points $A_1, A_2, \dots, A_n$.
- Pour tout point M ,

$$a_1 \overrightarrow{MA_1} + a_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{MA_n} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \overrightarrow{MG}$$

- Dans un repère, le barycentre de n points pondérés a pour coordonnées la moyenne des coordonnées des n points pondérés par les n coefficients.

Dans le cas d'un repère du plan, on obtient :

$$\begin{cases} x_G = \frac{a_1 x_{A_1} + a_2 x_{A_2} + \dots + a_n x_{A_n}}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \\ y_G = \frac{a_1 y_{A_1} + a_2 y_{A_2} + \dots + a_n y_{A_n}}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \end{cases}$$