

AYYADI Noureddine

ayyadi.n@hotmail.fr
Rabat.

Cours de Mathématiques.
Tronc commun scientifique B I.
Conforme au programme marocain.

Chapitre:4

Calcul vectoriel dans le plan.

Contenus du programme	Les capacités attendues	Recommandations pédagogiques
* Égalité de deux vecteurs ; somme de deux vecteurs ; relation de Chasles ; * Multiplication d'un vecteur par un nombre réel ; * Colinéarité de deux vecteurs, alignement de trois points ; * Définition vectorielle du milieu d'un segment.	* Construire un vecteur de la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$. * Exprimer les notions et les propriétés de la géométrie affine en utilisant l'outil vectoriel et réciproquement ; * Résoudre des problèmes géométriques en utilisant l'outil vectoriel.	* On rappellera les définitions de la somme de deux vecteurs et de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel, on introduira ensuite, à travers des activités simples, les propriétés : $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$ et $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$ et $a \cdot (b \cdot \vec{u}) = ab \cdot \vec{u}$. * La multiplication d'un vecteur par un nombre réel doit être liée d'une part, au point M de la droite (AB) qui a pour abscisse x dans le repère (A, B) c'est-à-dire $\vec{AM} = x\vec{AB}$, et d'autre part à l'interprétation vectorielle de l'alignement de trois points.

ACTIVITÉS

- 1 Soient A, B, C, D et E cinq points quelconques du plan.
Simplifier au maximum les expressions suivantes (sans faire de dessin), en utilisant les relations de Chasles :

$$\begin{aligned}\vec{U} &= \vec{BC} + \vec{DE} + \vec{CD} + \vec{AD} + \vec{EB}; & \vec{V} &= \vec{EC} - \vec{ED} + \vec{CB} - \vec{DB}; \\ \vec{W} &= 3\vec{AB} + 2\vec{BC} - \vec{DB}; & \vec{X} &= 87\vec{AC} + 82\vec{CD} + 3\vec{AD}.\end{aligned}$$

- 2 ABC un triangle. Dans chaque cas ci-dessous, exprimer $\vec{AM}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, puis construire M .

$$\begin{aligned}a) \vec{BM} + \vec{CA} &= \vec{BC} & b) 2\vec{MB} + \vec{BA} &= \vec{BC} & c) \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{AB} &= \vec{0} \\ d) 2\vec{MA} + 3\vec{MB} &= 5\vec{AC} & e) \vec{MB} - 2\vec{MC} &= \vec{CA} & f) 3\vec{MA} + 2\vec{MB} &= 3\vec{AB}\end{aligned}$$

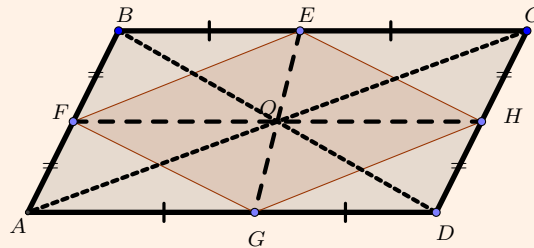
- 3 On considère la figure ci-dessous ($ABCD$ est un parallélogramme de centre O).

❶ Déterminer tous les vecteurs égaux à $\vec{BE}$.

❷ Déterminer tous les vecteurs égaux à $\vec{FE}$.

❸ Compléter les égalités suivantes.

$$\begin{aligned}\vec{AG} &= \vec{E} \cdot \vec{\quad} = \vec{\quad} \cdot \vec{O} & ; & & \vec{BC} + \vec{BA} &= \vec{\quad} & ; & & \vec{AC} = 2\vec{A} \cdot \vec{\quad} \\ \vec{EF} + \vec{EH} &= 2\vec{E} \cdot \vec{\quad} & ; & & \vec{AC} &= -2 \cdot \vec{G} & ; & & \vec{FB} + \vec{GD} = \vec{\quad} \\ \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} &= \vec{\quad} & ; & & \vec{DG} + \vec{AB} &= \vec{\quad}\end{aligned}$$



- 4 Soient A et B deux points distincts et I le milieu du segment $[AB]$.

❶ Montrer que: $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ et que $\vec{AB} = 2\vec{AI}$.

❷ Montrer que $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$ pour tout point M du plan.

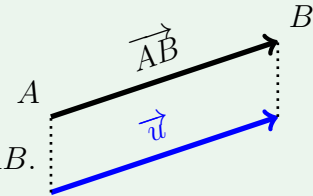
0.1 Vecteurs du plan(Rappels).

0.1.1 Vocabulaires et définitions.

DÉFINITION 1

Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est caractérisé par:

- **sa direction:** celle de la droite (AB) ;
- **son sens:** de A vers B ;
- **sa norme:** la distance entre A et B , on la note par $\|\vec{u}\| = AB$.



DÉFINITION 2

Pour tout point M du plan, on a $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

Le vecteur $\vec{0}$ est appelé le vecteur nul. Il n'a ni direction, ni sens et sa norme est égale à 0.

REMARQUE

A et M deux points du plan.

$$\overrightarrow{AM} = \vec{0} \text{ si, et seulement si } A = M$$

0.1.2 Égalité de deux vecteurs.

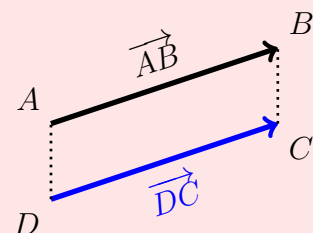
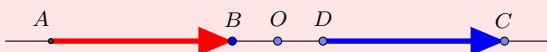
DÉFINITION 3

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.

PROPRIÉTÉS 1

1 A, B, C et D quatre points du plan.
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si, et seulement si les deux segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.

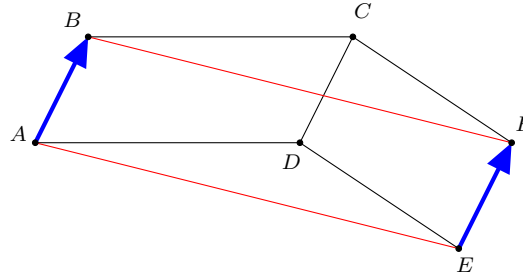
2 Si les points A, B, C et D sont non alignés. Alors:
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si, et seulement si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.



EXEMPLE 1

$ABCD$ et $DCFE$ sont deux parallélogrammes.
Montrer que $ABFE$ est un parallélogramme.

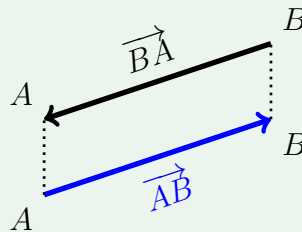
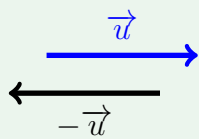
On a $ABCD$ un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, de plus $DCFE$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$ d'où $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ et par suite $ABFE$ est un parallélogramme.

**PROPRIÉTÉ 2**

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout point A du plan, il existe un unique point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

DÉFINITION 4

Deux vecteurs sont **opposés** s'ils ont même direction, même norme, mais leur sens est opposé.
Le vecteur opposé à $\vec{u}$ est $-\vec{u}$.



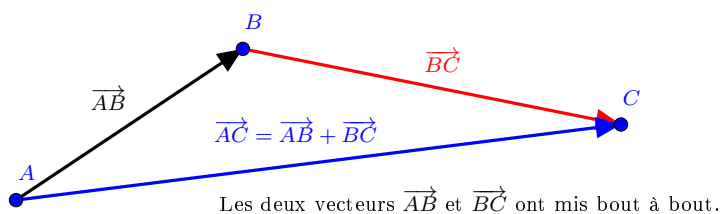
$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

0.1.3 Somme vectorielle.**DÉFINITION 5**

A, B et C étant trois points quelconques.

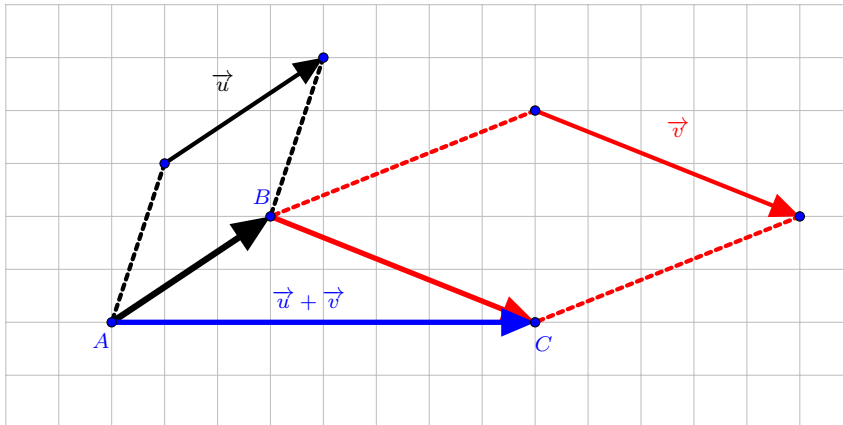
(relation de Chasles).

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

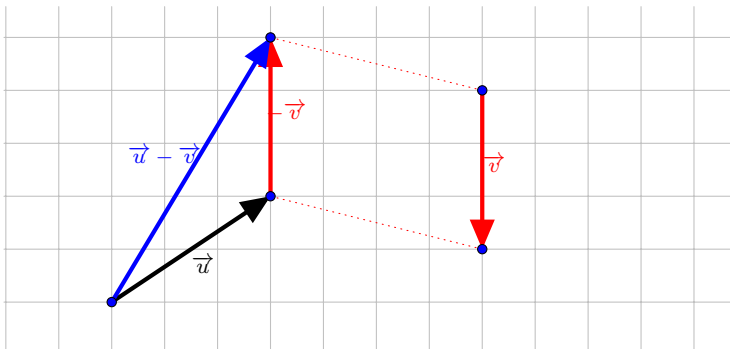


Construction du vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ à partir de la relation de Chasles.

On choisit un point A , on construit $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, puis $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$; alors
 $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ ($\overrightarrow{AC}$ est un représentant de $\vec{u} + \vec{v}$)

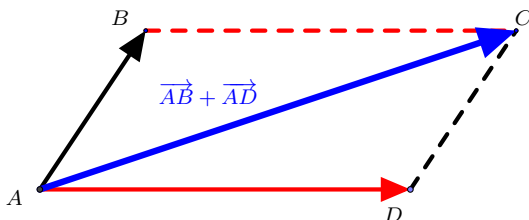
**REMARQUE***Différence de deux vecteurs*

Construire $\vec{u} - \vec{v}$ revient à construire $\vec{u} + (-\vec{v})$ car $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

**PROPRIÉTÉ 3***(règle du parallélogramme).*

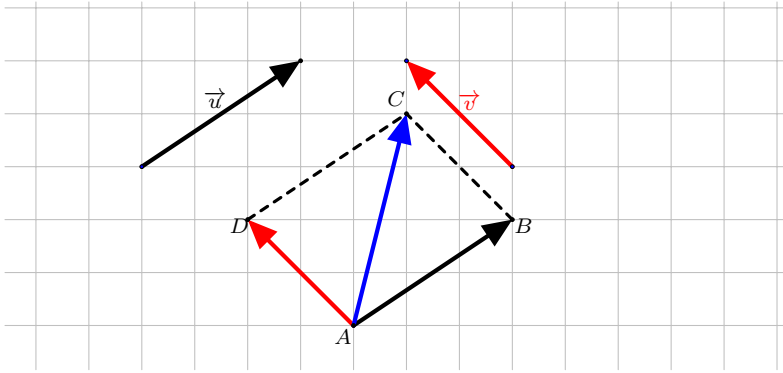
A, B, C et D étant quatre points quelconques non alignés, on a:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \text{ si, et seulement si } ABCD \text{ est un parallélogramme.}$$

**Construction du vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ à partir de la règle du parallélogramme.**

On choisit un point A , on construit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.

Les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même origine A donc le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ est égale à $\overrightarrow{AC}$, où C est le point tel que $ABCD$ est un parallélogramme.



0.2 Multiplication d'un vecteur par un réel.

DÉFINITION 6

Soit $\vec{u}$ un vecteur différent du vecteur nul, et k un nombre réel non nul.
Le produit de $\vec{u}$ par k est le vecteur $k\vec{u}$ caractérisé par:

1 Si $k > 0$ alors

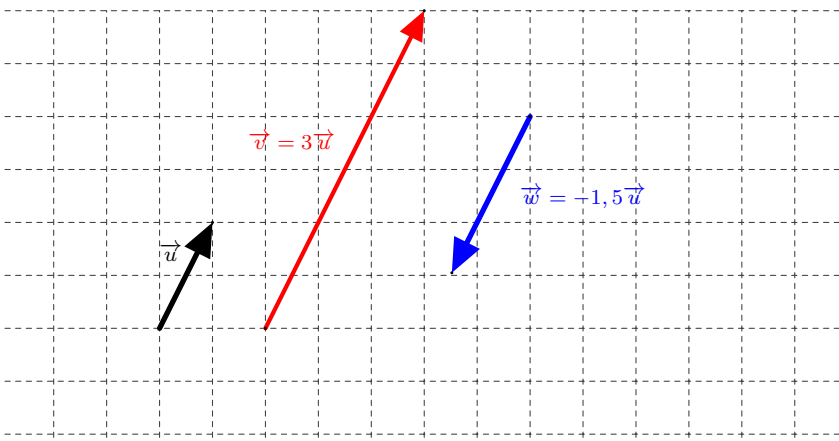
- ☐ $k\vec{u}$ a même direction que $\vec{u}$.
- ☐ $k\vec{u}$ a le même sens que $\vec{u}$.
- ☐ $\|k\vec{u}\| = k \times \|\vec{u}\|$.

2 Si $k < 0$ alors

- ☐ $k\vec{u}$ a même direction que $\vec{u}$.
- ☐ $k\vec{u}$ est de sens opposé au sens de $\vec{u}$.
- ☐ $\|k\vec{u}\| = -k \times \|\vec{u}\|$.

EXEMPLE

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. On va construire $\vec{v} = 3\vec{u}$ et $\vec{w} = -1,5\vec{u}$



PROPRIÉTÉS

Règles de calcul.

Pour tous les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tous les réels k et k' , on a :

$$1 \quad k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$$

$$2 \quad (k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$$

$$3 \quad k(k'\vec{u}) = (k \times k')\vec{u}$$

$$4 \quad k\vec{u} = \vec{0} \quad \text{si, et seulement si} \quad k = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{u} = \vec{0}$$

EXEMPLE

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Simplifions les deux expressions suivantes :

$$\vec{X} = \vec{u} + 2(\vec{u} - \vec{v}) - 3(\vec{u} + \vec{v}) \quad \text{et} \quad \vec{W} = \frac{1}{2}(4\vec{u} + 5\vec{v}) - 3\left(\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right)$$

On a :

$$\begin{aligned} \vec{X} &= \vec{u} + 2(\vec{u} - \vec{v}) - 3(\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \vec{u} + 2\vec{u} - 2\vec{v} - 3\vec{u} - 3\vec{v} \\ &= \cancel{\vec{u}} + 2\vec{u} - 3\vec{u} - 2\vec{v} - 3\vec{v} \\ &= -5\vec{v}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{W} &= \frac{1}{2}(4\vec{u} + 5\vec{v}) - 3\left(\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right) \\ &= 2\vec{u} + \frac{5}{2}\vec{v} - \vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v} \\ &= 2\vec{u} - \vec{u} + \frac{5}{2}\vec{v} - \frac{3}{2}\vec{v} \\ &= \vec{u} + \vec{v}. \end{aligned}$$

0.3 Vecteurs colinéaires.

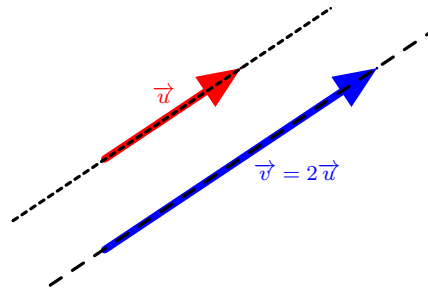
DÉFINITION 7

Deux vecteurs non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsqu'ils ont la même direction.

THÉORÈME 1

Deux vecteurs non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si, et seulement si, il existe un nombre réel k non nul tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

(k s'appelle le coefficient de colinéarité).



EXEMPLE

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ étant deux vecteurs donnés.

On considère les vecteurs $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}$ et $\vec{v} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{5}{3}\vec{j}$ et $\vec{w} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j}$

Calculer le vecteur $\vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w}$; puis déduire que $\vec{u} + \vec{v}$ est colinéaire à $\vec{w}$.

On a

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w} &= \frac{2}{5}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{5}{3}\vec{j} + 2\left(-\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j}\right) \\ &= \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5} - 1\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{3} + \frac{4}{3}\right)\vec{j} \\ &= 0\vec{i} + 0\vec{j} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Donc $\vec{u} + \vec{v} = -2\vec{w}$ et par suite $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

REMARQUE

Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.

0.3.1 Parallélisme et alignement.

Deux vecteurs sont colinéaires peut nous aider à montrer que deux droites sont parallèles ou que trois points sont alignés.

Résultat:1

Soient A, B, C et D quatre points du plan.

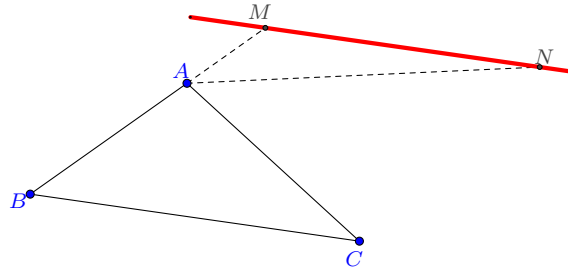
Les deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

EXEMPLE

Soit ABC un triangle.

Soient M et N les points tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Montrer que les deux droites (MN) et (BC) sont parallèles.



Pour montrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles, il suffit de prouver que les deux vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires c.à.d qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BC}$.

On a:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} \\
 &= -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \\
 &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
 &= -\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} \\
 &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} \\
 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\right)\overrightarrow{BC} \\
 &= \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}.
 \end{aligned}$$

Donc les deux vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et par suite les deux droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Résultat:2

Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

DÉMONSTRATION

Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si, et seulement si les droites (AB) et (AC) sont parallèles.

Or, les droites (AB) et (AC) ont le point A en commun, elles sont donc confondues et par suite les points A, B et C appartiennent à une même droite: ils sont alignés. ■

On peut aussi montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires ou que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

EXEMPLE

Soient A, B, C et D quatre points tels que $3\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$
Montrer que les points B, C et D sont alignés.

$$\begin{aligned}
&\text{On sait que} && 3\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0} \\
&\text{donc} && 3\overrightarrow{AD} - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) - 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{0} \\
&\text{donc} && 3\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0} \\
&\text{c.à.d} && \cancel{3\overrightarrow{AD}} - \cancel{3\overrightarrow{AD}} - \overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0} \\
&\text{finalement} && \overrightarrow{DB} = -2\overrightarrow{DC}.
\end{aligned}$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires, d'où les points B, C et D sont alignés.

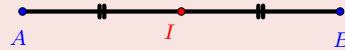
0.4 Milieu d'un segment et les vecteurs.

THÉORÈME 2

Soient A, B et I trois points du plan.

Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est réalisée:

- 1 $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$
- 2 $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{0}$
- 3 $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{IB}$



EXEMPLE

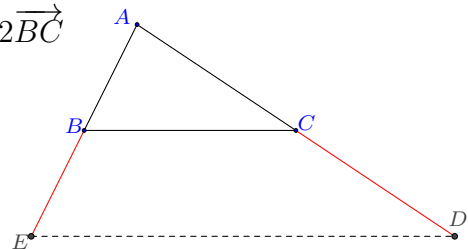
Soit ABC un triangle.

- 1 Construire les points D et E tels que $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$
- 2 Démontrer que le point C est le milieu du segment $[AD]$.

On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} \\
\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} \\
\overrightarrow{AD} &= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \\
\overrightarrow{AD} &= 2\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

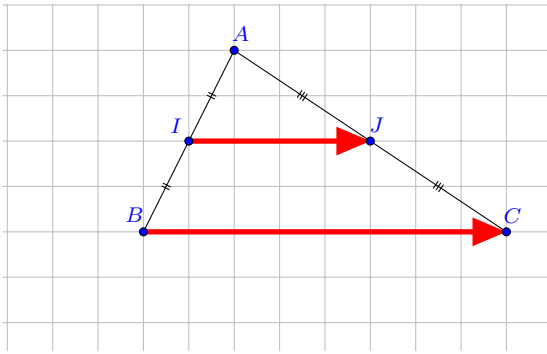
finalement, le point C est le milieu de $[AD]$.



EXEMPLE

Soient ABC un triangle et les points I et J sont respectivement les milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$.

Montrer que $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$.



Comme I est le milieu de $[AB]$ alors $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{IA}$ (1)
de plus J est le milieu de $[AC]$ donc $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AJ}$ (2).

D'où, d'après (1), (2) et la relation de Chasles on a :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AJ}$$

$$\overrightarrow{BC} = 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ})$$

$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}.$$

Ce qui fournit le résultat.

PROPRIÉTÉS 4

Propriété Caractéristique du milieu d'un segment.

Soient A, B et C trois points non alignés du plan.

Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si, et seulement si,

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \text{ pour tout point } M \text{ du plan.}$$

DÉMONSTRATION

1 Soit $[AB]$ un segment et I son milieu. Soit M un point du plan, On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\ &= 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} \\ &= 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{0} \quad (\text{on a } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0} \text{ car } I \text{ est le milieu de } [AB]) \\ &= 2\overrightarrow{MI}. \end{aligned}$$

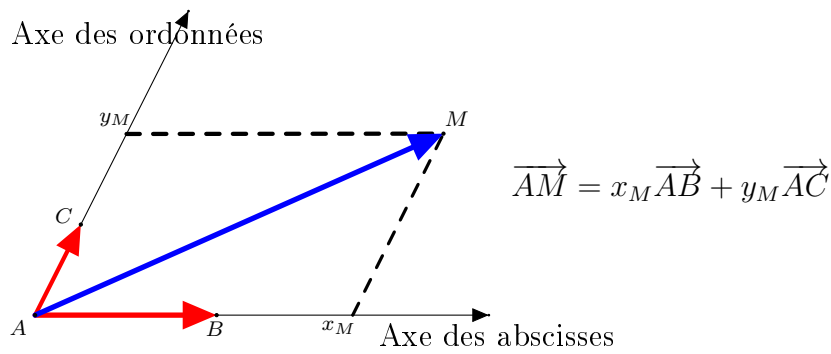
2 Si on a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ pour tout point M du plan, alors si on remplace M par I on obtient $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{II} = \overrightarrow{0}$, d'où I est le milieu du segment $[AB]$. ■

0.5 Repérage d'un point ou d'un vecteur dans le plan.

DÉFINITION 8

Trois points A, B et C non alignés du plan définissent **un repère** $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

- Le couple $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est appelé **base du plan**;
- A est l'origine du repère ;
- (AB) = axe des abscisses avec unité AB ;
- (AC) = axe des ordonnées avec unité AC .



THÉORÈME 3

Soient A, B et C trois points non alignés du plan.

Alors, pour tout point M du plan, il existe un couple unique de nombres réels (x_M, y_M) tels que:

$$\overrightarrow{AM} = x_M \overrightarrow{AB} + y_M \overrightarrow{AC}$$

- Le couple (x_M, y_M) est appelé le couple des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- Le point M a pour cordonnée (x_M, y_M) dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- Le réel x_M est appelé abscisse du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- Le réel y_M est appelé ordonnée du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

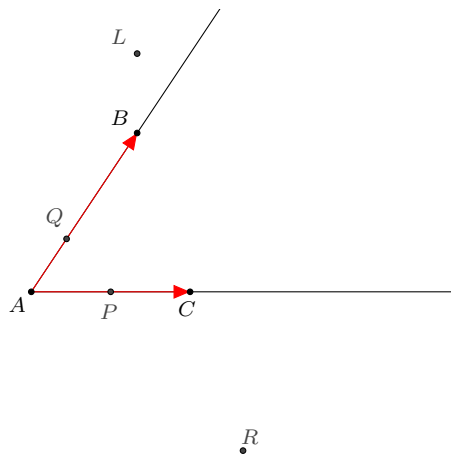
EXEMPLE

A, B et C trois points non alignés.

P est le milieu de $[AC]$, R le symétrique de B par rapport à C .

Les points Q et L sont définis par: $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BL} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$.

Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, déterminer les coordonnées des points A, B, C, P, Q, R et L



★ Comme A est l'origine du repère alors le couple des cordonnées de A est $(0, 0)$.

★ Le vecteur AB peut s'écrire dans la base (AB, AC) sous la forme: $\overrightarrow{AB} = 1 \times \overrightarrow{AB} + 0 \times \overrightarrow{AC}$ donc $B(1, 0)$.

De même $\overrightarrow{AC} = 0 \times \overrightarrow{AB} + 1 \times \overrightarrow{AC}$ donc $C(0, 1)$

★ On a P est le milieu de $[AC]$ alors $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AP}$ s'écrit dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sous la forme: $\overrightarrow{AP} = 0 \times \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AC}$, d'où $P\left(0, \frac{1}{2}\right)$

★ On sait que R est le symétrique de B par rapport à C donc C est le milieu de $[RB]$, d'où $\overrightarrow{BR} = 2\overrightarrow{BC}$. (★)

Maintenant, on va exprimer $\overrightarrow{AR}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AR} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BR} \\ &= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} \quad \text{d'après (★)} \\ &= \overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \\ &= -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

et finalement $R(-1, 2)$.

★ On a $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 0 \times \overrightarrow{AC}$ donc $Q\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

★

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AL} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

donc $L\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right)$.

0.6 Exercices résolus.

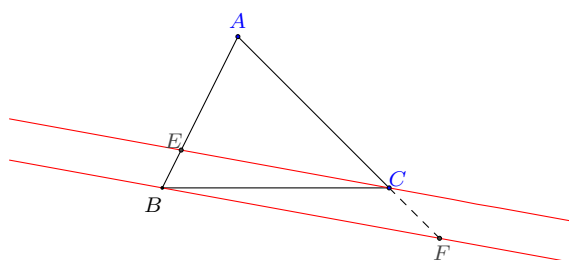
Exercice:1

Soient ABC un triangle et E et F les points définis par $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

- 1 Faire une figure.
- 2 Ecrire $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$; et en déduire que (BF) et (EC) sont parallèles.

Correction:

1



2 On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EC} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} \\ &= -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BF} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} \\ &= -\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}\overrightarrow{BF} &= \frac{3}{4}(-\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}) \\ &= -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{EC}.\end{aligned}$$

donc $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires et par suite les deux droites (EC) et (BF) sont parallèles.

Exercice:2

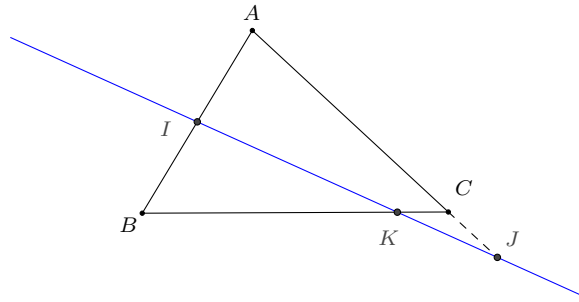
ABC un triangle, I le milieu de $[AB]$ et J et K deux points tels que:

$$\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CB}.$$

- 1 Construire J et K .
- 2 Montrer que $\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.
- 3 Conclure que les points I, J , et K sont alignés.

Correction:

1



❷ On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KJ} &= \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CJ} \\ &= -\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{CJ} \\ &= -\frac{1}{6}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \\ (\overrightarrow{IB} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ car } I \text{ est le milieu de } [AB]) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

❸ On a

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{KJ} &= 3\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{IJ}.\end{aligned}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{KJ}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires, et par suite les points I , J , et K sont alignés.

Exercice:3

A, B et C trois points non alignés.

On considère les deux vecteurs suivants:

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \vec{v} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} + \frac{7}{4}\overrightarrow{AC}$$

❶ Exprimer $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ seulement.

❷ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires?

Correction:

❶ On a

$$\begin{aligned}\vec{u} &= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC} \\ &= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AC} \\ &= 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\vec{v} &= -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} + \frac{7}{4}\overrightarrow{AC} \\ &= -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + \frac{7}{4}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{7}{4}\overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

❷ On constate que

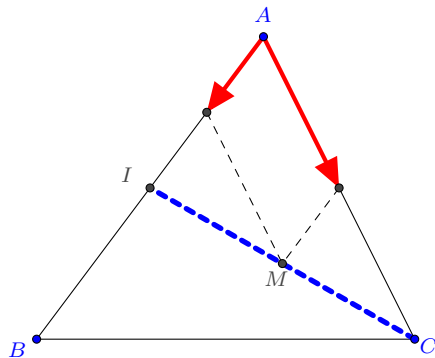
$$\begin{aligned}-\frac{3}{4}\vec{u} &= -\frac{3}{4}(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}) \\ &= -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{6}{4}\overrightarrow{AC} \\ &= \vec{v}.\end{aligned}$$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercise:4

Soient ABC un triangle et M un point tel que: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

- ❶ Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- ❷ Soit I le milieu de $[AB]$. Montrer que M est le milieu de $[IC]$.



- 1** On a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$
donc $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{0}$
donc $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$
c.à.d $4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$
alors $-4\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$
d'où $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

- ② On considère le segment $[AB]$ et son milieu I et on applique la propriété caractéristique du milieu d'un segment, on aura donc

$$\begin{aligned} 2\vec{CI} &= \vec{CA} + \vec{CB} \\ \vec{CI} &= \frac{1}{2}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{CB} \\ \vec{CI} &= \frac{1}{2}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{AB} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

On a aussi:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MI} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI} \\ &= -AM + AI \\ &= -\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

donc $2\overrightarrow{MI} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ c.à.d $\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{MI}$.

Ce qui montre que $\overset{Z}{M}$ est le milieu de $[IC]$.

Bon courage.