

AYYADI Noureddine

ayyadi.n@hotmail.fr

Rabat.

Cours de Mathématiques.
Tronc commun scientifique B I.
Conforme au programme marocain.

Chapitre:1

Ensemble des nombres entiers naturels $\mathbb{N}$

et notions en arithmétique.

Contenus du programme	Les capacités attendues	Recommandations pédagogiques
* Les nombres pairs et les nombres impairs ; * Multiples d'un nombre, le plus petit multiple commun de deux nombres ; * Diviseurs d'un nombre, le plus grand diviseur commun de deux nombres ; * Nombres premiers, décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers.	* Utiliser la parité et la décomposition en produit de facteurs premiers pour résoudre des problèmes simples portant sur les entiers naturels.	* On introduira les symboles: $\in, \notin, \subset, \cap, \cup$. * l'objectif de la présentation de "notions en arithmétique" est d'initier les élèves à des modes de démonstration à travers l'utilisation des nombres pairs et des nombres impairs sans excès.



ACTIVITÉS

1 Déterminer les nombres pairs et les nombres impairs de la liste suivante:
 367890 ; 16485 ; $14^2 + 6$; $15^2 + 13^2$; 211×24 ; 37×301 ; 15×1731 ; $19^2 - 111$

2 n un entier naturel.

a. Démontrer que si n est impair alors 8 divise $n^2 - 1$.

b. Le nombre $1 + 3^n$ est-il toujours pair ?

c. Démontrer que $2^n + 2^{n+1}$ est divisible par 3.

3 Montrer que a est un multiple de b dans les cas suivants:

$$a = 120 \times 28 \quad \text{et} \quad b = 5 \times 24$$

$$a = 15 \times 750 \quad \text{et} \quad b = 25^2 \times 3$$

$$a = 5^3 \times 8^2 \times 9 \quad \text{et} \quad b = 5^2 \times 4^2 \times 3$$

Achamel.info

4 a. Déterminer tous les diviseurs communs de 24 et 34.

b. On pose $x = 3 \times 5 \times 7 \times 12$ et $y = 2 \times 5 \times 3 \times 5$.

Sans calculer x et y , montrer que :

i. 75 est un diviseur de y .

ii. x est un multiple de 105.

5 Parmi les nombres: 12 ; 30 ; 27 ; 246 ; 19350 ; 4238 ; 154790 ; 5005005, indique ceux qui sont divisibles:

a. par 2

b. par 3

c. par 5

d. par 9.

6 Dans un collège, les élèves se décomposent en 408 garçons et 578 filles. On veut former des équipes mixtes de telle façon qu'il y ait le même nombre de garçons dans chaque équipe et le même nombre de filles dans chaque équipe. On veut aussi que tous les élèves soient dans une équipe.

a. Quel est le nombre maximal d'équipes pouvant être formées ?

b. Donner alors la composition de chaque équipe.

7 Deux voitures font des tours sur un circuit fermé, elles partent toutes les deux à midi de la ligne de départ. L'une parcourt le circuit en 30 minutes, l'autre en 36 minutes.

a. À quelle heure les deux voitures repasseront-elles en même temps la ligne de départ ?

b. Combien auront-elles fait de tours ?

I La divisibilité dans l'ensemble $\mathbb{N}$

1 Notations et vocabulaires.

DÉFINITION 1

- Tous les nombres entiers naturels forment un ensemble qu'on note $\mathbb{N}$ appelé l'ensemble des entiers naturels et qui est défini comme suit:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

- On désigne par $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls. $\mathbb{N}^*$ se lit "N privé de zéro".

EXEMPLES 1

- 1** 3 est un entier naturel, on dit que 3 appartient à l'ensemble $\mathbb{N}$ et on écrit $3 \in \mathbb{N}$.
- 2** -5 n'est pas un entier naturel, on écrit $-5 \notin \mathbb{N}$.
- 3** $4 \in \mathbb{N}^*$, $-7 \notin \mathbb{N}$, $2,5 \notin \mathbb{N}$, $\frac{16}{2} \in \mathbb{N}$, $0 \notin \mathbb{N}^*$.

2 Les nombres pairs et les nombres impairs.

DÉFINITION 2

- On dit qu'un nombre entier n est un nombre **pair** s'il est divisible par 2.
- Un entier qui n'est pas pair est un entier **impair**.

EXEMPLE 2

0, 48, 2016 sont des nombres pairs et 21, 315, 2017 sont des nombres impairs.

PROPRIÉTÉS 1

- 1** Un nombre naturel n est **pair** si et seulement s'il s'écrit sous la forme

$$n = 2 \times k \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}.$$

- 2** Un nombre naturel n est **impair** si et seulement s'il s'écrit sous la forme

$$n = 2 \times k + 1 \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}.$$

EXEMPLE 3

- On a $144 = 2 \times 72$, donc 144 est un nombre pair.
- On a $161 = 2 \times 80 + 1$, donc 161 est un nombre impair.

PROPRIÉTÉS 2

- 1 La somme de deux nombres de même parité est un nombre pair.
(c.à.d: pair + pair = pair et impair + impair = pair)
- 2 Chaque produit contenant un nombre pair est un nombre pair.
- 3 Le produit de deux nombres impairs est un nombre impair.

DÉMONSTRATION

- 1 i) Montrons que si a est pair et b est pair alors $a + b$ est pair.
Si a est pair, alors il existe un entier naturel k tel que $a = 2 \times k$.
Si b est pair, alors il existe un entier naturel k' tel que $b = 2 \times k'$.
Par suite $a + b = 2k + 2k' = 2 \times (k + k') = 2 \times k''$ avec $k'' \in \mathbb{N}$,
d'où $a + b$ est un nombre pair.
ii) Si a et b sont deux entiers impairs, alors
 $a = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $b = 2k' + 1$ avec $k' \in \mathbb{N}$, par suite

Achamel.info

$$\begin{aligned} a + b &= 2k + 1 + 2k' + 1 = 2k + 2k' + 2 \\ &= 2(k + k' + 1) \\ &= 2k'' \text{ avec } k'' = (k + k' + 1) \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Donc $a + b$ est pair.

- 2 Considérons, par exemple le produit $P = a \times b \times c$ des trois entiers naturels.
Et supposons que l'un des facteurs est un nombre pair, par exemple a est pair, alors il existe un entier k tel que $a = 2k$, donc le produit devient $P = 2 \times k \times b \times c$
c-à-d $P = 2 \times k'$ avec $k' = (k \times b \times c) \in \mathbb{N}$. Ainsi P est pair.
- 3 Soient a et b sont deux entiers impairs, alors
 $a = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $b = 2k' + 1$ avec $k' \in \mathbb{N}$, par suite

$$\begin{aligned} a \times b &= (2k + 1) \times (2k' + 1) = 4kk' + 2k + 2k' + 1 \\ &= 2(2kk' + k + k') + 1 \\ &= 2k'' + 1 \text{ avec } k'' = (2kk' + k + k') \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Donc $a \times b$ est impair.

Résultat:1

Soit n un entier naturel.

- ❶ Si n est pair alors n^2 est pair.
- ❷ Si n est impair alors n^2 est impair.

Résultat:2

Le produit de deux nombres entiers **successifs** (qui se suivent) quelconques est un nombre pair.

DÉMONSTRATION

Deux nombres successifs l'un de ces deux entiers est pair, et comme tout produit contient un nombre pair est pair alors le produit de deux nombres successifs est pair.

EXEMPLE 4

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Les deux nombres n et $n + 1$ sont successifs donc le produit $n(n + 1)$ est pair.

Exercice résolu

Soit n un entier naturel.

- 1 Le nombre $1 + 3^n$ est-il toujours pair ?
- 2 Démontrer que $2^n + 2^{n+1}$ est divisible par 3.
- 3 Démontrer que si n est impair alors 8 divise $n^2 - 1$.
- 4 Montrer que $A = n^2 + 3n + 2$ est un nombre pair.

Correction:

- 1 On a 3 est un nombre impair, alors 3^n est un nombre impair, et comme $3^n + 1$ est somme de deux nombres impairs, alors il est pair.
Par conséquent $1 + 3^n$ est toujours pair.

- 2 On a:

$$\begin{aligned} 2^n + 2^{n+1} &= 2^n \times (1 + 2) \\ &= 3 \times 2^n \\ &= 3 \times k \quad \text{avec } k = 2^n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Donc, $2^n + 2^{n+1}$ est un multiple de 3.

- 3 Soit n un entier impair, alors il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$, d'où

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= (2k + 1)^2 - 1 \\ &= 4k^2 + 4k \\ &= 4 \times k(k + 1) \end{aligned}$$

et comme k et $k + 1$ sont deux nombres successifs, alors leur produit $k(k + 1)$ est un nombre pair, d'où il existe un entier k' tel que $k(k + 1) = 2k'$.

Par suite

$$n^2 - 1 = 4 \times 2k' = 8k'$$

par conséquent $n^2 - 1$ est un multiple de 8.

- 4 1^{ère} méthode: On a:

$$\begin{aligned} A &= n^2 + 3n + 2 = n^2 + n + 2n + 2 \\ &= \underbrace{n(n + 1)}_{\text{nombre pair}} + \underbrace{2(n + 1)}_{\text{nombre pair}} \end{aligned}$$

et comme la somme de deux nombres pairs est un nombre pair, on conclut donc que A est un nombre pair.

2^{ème} méthode: On va distinguer deux cas, lorsque n est pair et lorsqu'il est impair.

1^{er} cas: Si n est pair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k$, d'où

$$\begin{aligned} A &= (2k)^2 + 3 \times 2k + 2 = 4k^2 + 6k + 2 \\ &= 2(2k^2 + 3k + 1) \\ &= 2k' \quad \text{avec} \quad k' = (2k^2 + 3k + 1) \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Donc A est pair.

2^{ème} cas: Si n est impair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$, d'où

$$\begin{aligned} A &= (2k + 1)^2 + 3 \times (2k + 1) + 2 = 4k^2 + 10k + 6 \\ &= 2(2k^2 + 5k + 3) \\ &= 2k' \quad \text{avec} \quad k' = (2k^2 + 5k + 3) \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Donc A est pair.

Alors dans tous les cas A est un nombre pair.

II Diviseurs et Multiples d'un entier:

DÉFINITION 3

Soient a et b deux entiers naturels. S'il existe un entier naturel k tel que

$$a = k \times b.$$

On dit que:

- ★ b divise a (ou b est un diviseur de a .)
- ★ a est un multiple de b .
- ★ a est divisible par b .

Achamel.info

EXEMPLES 5

- 1** On a: $145 = 5 \times 29$, donc 145 est un multiple de 5 et de 29. On dit aussi que 5 et 29 sont deux diviseurs de 145.
- 2** Les multiples de 30 sont: 0, 30, 60, 90, (il y'en a une infinité.)
- 3** Les diviseurs de 30 sont: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 (il y' en a un nombre fini.)

REMARQUES

- 1 0 est un multiple de tous les nombres entiers naturels.
- 2 1 est un diviseur de tous les nombres entiers naturels.
- 3 Tous les nombres entiers naturels sont divisibles par 1 et par eux-même.

PROPRIÉTÉ 3

Soient a, b et d trois entiers naturels.

Si d est un diviseur commun à a et b avec $a > b$ alors d est également un diviseur de $a + b$ et de $a - b$.

Plus généralement, si d divise a et b alors d divise tout nombre de la forme $au + bv$ où u et v sont des entiers naturels.

DÉMONSTRATION

Si d divise a et b alors il existe deux entiers naturels k et k' tels que

$$a = k \times d \quad \text{et} \quad b = k' \times d.$$

On a donc

$$a + b = \underbrace{(k + k')}_{k_1} \times d \quad ; \quad a - b = \underbrace{(k - k')}_{k_2} \times d \quad \text{et} \quad au + bv = \underbrace{(ku + k'v)}_{k_3} \times d$$

c-à-d

$$a + b = \underbrace{k_1}_{\in \mathbb{N}} \times d \quad ; \quad a - b = \underbrace{k_2}_{\in \mathbb{N}} \times d \quad \text{et} \quad au + bv = \underbrace{k_3}_{\in \mathbb{N}} \times d$$

Donc d divise $a + b$; $a - b$ et $au + bv$.

Exercice résolu

Soit d un entier naturel non nul et on pose $a = 11d + 7$ et $b = 5d - 3$.
Montrer que tout diviseur de a et b est un diviseur de 68.

Correction:

Soit m un diviseur de a et de b , alors m divise $5a$ et $11b$.

Par suite,

$$\begin{aligned} m \text{ divise } 5a - 11b & \quad \text{c-à-d} \quad m \text{ divise } 5(11d + 7) - 11(5d - 3) \\ & \quad \text{c-à-d} \quad m \text{ divise } 55d + 35 - 55d - 33 \\ & \quad \text{c-à-d} \quad m \text{ divise } 68. \end{aligned}$$

III Les nombres premiers:

DÉFINITION 4

Un nombre qui a exactement deux diviseurs est appelé **nombre premier**.
c-à-d n'admet que deux diviseurs 1 et lui même.

EXEMPLE 6

Les nombres premiers inférieurs à 30 sont: 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29.

DÉFINITION 5

Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers signifie trouver tous les diviseurs premiers de ce nombre.

PROPRIÉTÉ 4

Tout entier naturel non premier plus grand que 1 peut être décomposé en produit de facteurs premiers.

EXEMPLE 7

La décomposition en produit de facteurs premiers du nombre 36 est: $36 = 2^2 \times 3^2$.



L'écriture $36 = 4 \times 9$ n'est pas une décomposition en produit de facteurs premiers.

MÉTHODE

Décomposition d'un entier

Pour décomposer un entier en produit de facteurs premiers, on effectue des divisions successives par des nombres premiers dans l'ordre croissant.

On va décomposer le nombre 882 :

882	2
441	3
147	3
49	7
7	7
1	

Donc $882 = 2 \times 3^2 \times 7^2$

IV Le plus grand diviseur commun (pgcd):

DÉFINITION 6

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

On appelle **pgcd** de a et b le plus grand diviseur commun de a et b , on le note souvent par $\text{pgcd}(a, b)$ ou $a \wedge b$.

EXEMPLE 8

(énumération de tous les diviseurs)

Déterminons le $\text{pgcd}(24, 18)$.

On a: les diviseurs de 24 sont: 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24 ,
et les diviseurs de 18 sont: 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 .

Donc les diviseurs communs de 24 et 18 sont: 1 ; 2 ; 3 ; 6.

D'où le $\text{pgcd}(24, 18) = 6$.

PROPRIÉTÉ 5

Le plus grand diviseur commun de deux entiers naturels a et b est le **produit des facteurs premiers communs** (dans leurs décomposition en produit de facteurs premiers) **élevé au petit exposant**.

Achamel.info

EXEMPLE 9

1 Déterminer le pgcd de 113400 et 3667356.

2 En déduire l'écriture simplifiée de $\frac{113400}{3667356}$ et $\sqrt{113400}$.

Solution:

1 Cherchons le pgcd des deux nombres $a = 113400$ et $b = 3667356$.

On a: $a = 2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$ et $b = 2^2 \times 3^5 \times 7^3 \times 11$.

Pour trouver le pgcd, on ne prend que les facteurs premiers qui apparaissent dans les deux décompositions et on les affecte du plus petit exposant.

Donc

$$\text{pgcd}(a, b) = 2^2 \times 3^4 \times 7,$$

d'où

$$\text{pgcd}(113400, 3667356) = 2268.$$

2 On a:

$$\begin{aligned} \frac{113400}{3667356} &= \frac{2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7}{2^2 \times 3^5 \times 7^3 \times 11} = \frac{2^3}{2^2} \times \frac{3^4}{3^5} \times \frac{7}{7^3} \times \frac{5^2}{11} \\ &= \frac{2^{\cancel{3}}}{2^{\cancel{2}}} \times \frac{3^{\cancel{4}}}{3^{\cancel{5}}} \times \frac{7}{7^{\cancel{3}}} \times \frac{5^2}{11} = \frac{2 \times 5^2}{7^2 \times 11} \\ &= \frac{50}{539}. \end{aligned}$$

et

$$\sqrt{113400} = \sqrt{2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7} = 2 \times 3^2 \times 5 \times \sqrt{2 \times 7} = 90\sqrt{14}.$$

REMARQUE

Pour obtenir une fraction irréductible, il faut diviser le numérateur et le dénominateur par le pgcd des deux.

V Le plus petit multiple commun (ppcm):

DÉFINITION 7

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

On appelle **ppcm** de a et b le plus petit multiple commun non nul de a et b , on le note souvent par $\text{ppcm}(a, b)$ ou $a \vee b$.

EXEMPLE 10

Déterminons le $\text{ppcm}(8, 12)$.

les multiples de 8 sont: 0 ; 8 ; 16 ; 24 ; 32 . . .

et les multiples de 12 sont: 0 ; 12 ; 24 ; 36 ; 48 . . .

Donc 24 est le plus petit multiple commun de 8 et 12, c-à-d $\text{ppcm}(8, 12) = 24$.

PROPRIÉTÉ 6

Le plus petit multiple commun de deux entiers naturels a et b est **le produit des facteurs premiers communs ou non communs** (dans leurs décomposition en produit de facteurs premiers) **élevé au plus grand exposant**.

EXEMPLE 11

Déterminons le $\text{ppcm}(264, 2268)$.

On a $264 = 2^3 \times 3 \times 11$ et $2268 = 2^2 \times 3^4 \times 7$.

Prenons tous les facteurs qui figurent dans l'un au moins de ces produits, nous leur attribuons leur plus grand exposant ; effectuons ensuite le produit:

Donc $\text{ppcm}(264, 2268) = 2^3 \times 3^4 \times 11 \times 7 = 49896$.

PROPRIÉTÉ 7

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

On a:

$$\text{pgcd}(a, b) \times \text{ppcm}(a, b) = a \times b.$$

EXEMPLE 12

Sachant que $\text{ppcm}(72, 132) = 792$, cherchons le $\text{pgcd}(72, 132)$.

On a:

$$\text{pgcd}(72, 132) = \frac{72 \times 132}{792} = 12.$$

VI La divisibilité par: 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 9.

PROPRIÉTÉ 8

- ☐ Un entier est divisible par **2** si son chiffre des unités est pair (c-à-d s'il se termine par 0 , 2 , 4 , 6 , 8).
- ☐ Un entier est divisible par **3** si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- ☐ Un entier est divisible par **4** si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
- ☐ Un entier est divisible par **5** s'il se termine par 0 ou 5.
- ☐ Un entier est divisible par **9** si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

EXEMPLE 13

Le nombre 4320 est divisible par 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 9.

Exercice:

Comment choisir le chiffre x pour que $A = 112x$ soit divisible par 5 et par 9.

Solution:

A est divisible par 5 veut dire que $x = 0$ ou $x = 5$ et A est divisible par 9 veut dire que $1 + 1 + 2 + x = 9k$ (avec $k \in \mathbb{N}$).

- ★ Si $x = 0$, on a alors $1 + 1 + 2 + 0 = 4$ or 4 n'est pas divisible par 9, donc $x = 0$ n'est pas une valeur convenable.
- ★ Si $x = 5$, on a alors $1 + 1 + 2 + 5 = 9$ est divisible par 9.
D'où la valeur possible de x est 5, donc $A = 1125$.

Bon courage.