

Chapitre 11

Etude des fonctions numériques

I Asymptotes

1) Asymptote verticale

Définition : Soit a un nombre réel.

Lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$), on dit que la droite d'équation $x = a$ est **asymptote** (verticale) à la courbe représentant f .

Remarque : Cette définition est aussi valable pour les limites à droite ou à gauche.

Exemple : On reprend l'exemple du 2.3.1.

On a vu que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{3} \\ x < \frac{1}{3}}} \frac{x-2}{3x-1} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{3} \\ x > \frac{1}{3}}} \frac{x-2}{3x-1} = -\infty$$

Donc la droite d'équation $x = \frac{1}{3}$ est asymptote à la courbe représentant la fonction $x \rightarrow \frac{x-2}{3x-1}$.

Asymptote horizontale

Définition : Soit l un réel.

Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$), on dit que la droite d'équation $y = l$ est **asymptote** (horizontale) à la courbe représentant f .

Exemple : On reprend l'exemple du 2.3.2.

On a vu que :

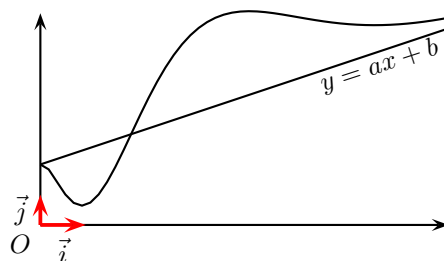
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x^3} = 0$$

Donc la droite d'équation $y = 0$ (c'est-à-dire l'axe des abscisses) est asymptote à la courbe représentant la fonction $x \rightarrow \frac{x+2}{x^3}$.

3) Asymptote oblique

Définition : Soit Δ la droite d'équation $y = ax + b$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$) alors la droite Δ est **asymptote** à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant f .



$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

Exemple :

$$x \longmapsto 2x + 1 + \frac{1}{x}$$

- $\mathcal{C}_f$ admet-elle une droite comme asymptote en $+\infty$?
- Justifier.

$$f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$$

Exemple :

$$x \longmapsto \sqrt{x^2 - 1} + 2x$$

- Déterminer $\mathcal{D}_f$;
- Prouver que la droite $d : y = 3x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$;
- $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote oblique en $-\infty$? (*attendre ce qui suit pour répondre à cette question*)

Exemple : Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 5x + 1}{2x + 1}$$

et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = -x + 3$.

$$\begin{aligned} f(x) - (-x + 3) &= \frac{-2x^2 + 5x + 1}{2x + 1} - (-x + 3) \\ &= \frac{-2x^2 + 5x + 1 - (-x + 3)(2x + 1)}{2x + 1} \\ &= \frac{-2x^2 + 5x + 1 - (-2x^2 + 6x - x + 3)}{2x + 1} \\ &= \frac{-2x^2 + 5x + 1 + 2x^2 - 6x + x - 3}{2x + 1} \\ &= -\frac{2}{2x + 1} \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{2x+1} \right) = 0$, donc $\mathcal{D}$ est asymptote à la courbe représentant la fonction f .

Remarque : Pour étudier la position de la courbe représentant f par rapport à son asymptote, il suffit d'étudier le signe de $\phi(x) = f(x) - (ax + b)$.

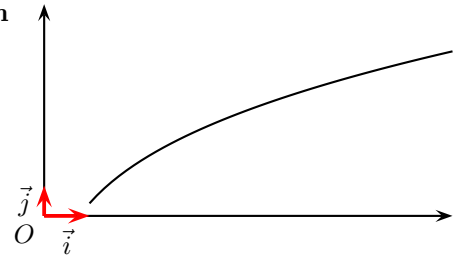
Exercice : Reprendre l'exemple précédent et étudier les positions relatives de la courbe représentant f et de son asymptote.

II Branches paraboliques

1) Branche parabolique de direction (Ox)

On dit que $\mathcal{C}_f$ présente une **branche parabolique de direction asymptotique** (Ox) en $+\infty$ si :

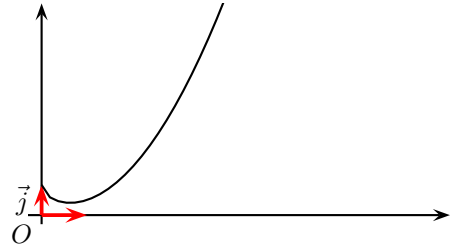
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$;



2) Branche parabolique de direction (Oy)

On dit que $\mathcal{C}_f$ présente une **branche parabolique de direction asymptotique** (Oy) en $+\infty$ si :

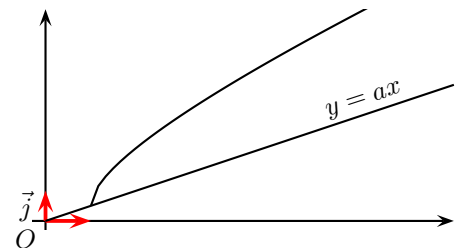
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$;



3) Branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$

On dit que $\mathcal{C}_f$ présente une **branche parabolique de direction asymptotique** la droite d'équation $y = ax$ en $+\infty$ si :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = \pm\infty$;



III) Convexité – Point d'inflexion

1) Notion de convexité, de concavité

Définition : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

- On dit que f est **convexe** sur I si, sur l'intervalle I , la courbe $\mathcal{C}$ est entièrement **au-dessus** de chacune de ses **tangentes**.
- On dit que f est **concave** sur I si, sur l'intervalle I , la courbe $\mathcal{C}$ est entièrement **au-dessous** de chacune de ses **tangentes**.

Exemples :

1. La fonction carrée $x \rightarrow x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (voir figure 1).

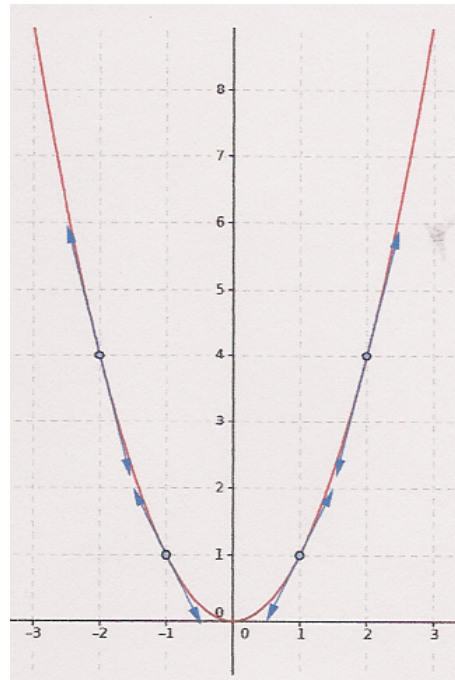


FIGURE 1 – La fonction carrée

2. La fonction racine carrée $x \rightarrow \sqrt{x}$ est concave sur $[0; +\infty[$ (voir figure 2).
3. La fonction inverse $x \rightarrow \frac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty; 0[$ et convexe sur $]0; +\infty[$ (voir figure 3).

2) Point d'inflexion

Définition : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère et $a \in I$.

On dit que le point $A(a; f(a))$ est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}$ si, en A , la courbe $\mathcal{C}$ **traverse sa tangente**.

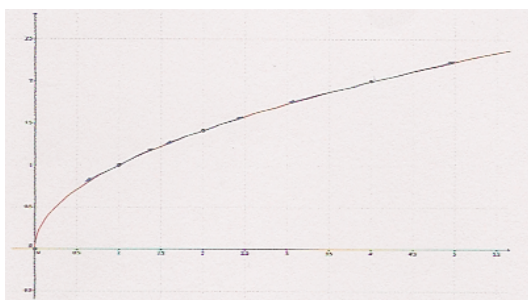


FIGURE 2 – La fonction racine carrée

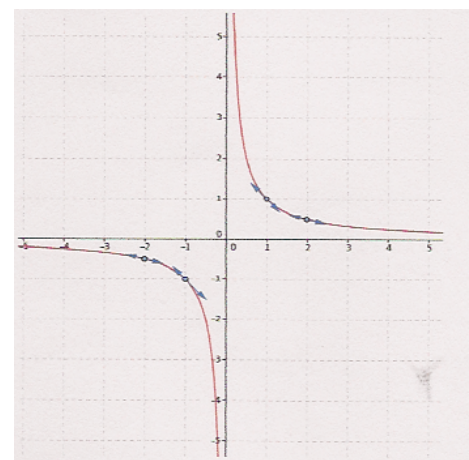


FIGURE 3 – La fonction inverse

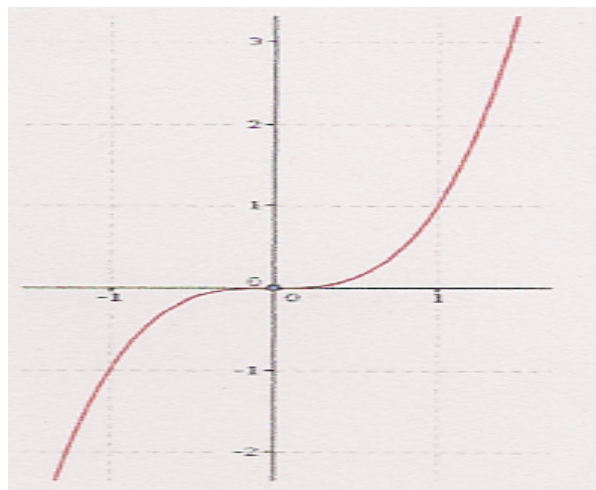


FIGURE 4 – La fonction cube

Exemple : La fonction cube $x \rightarrow x^3$ admet un point d'inflexion en l'origine O du repère (voir figure 6). Elle est concave sur $] -\infty ; 0]$ et convexe sur $[0 ; +\infty[$.

Remarque : En l'abscisse a du point d'inflexion, la courbe $\mathcal{C}$ passe de concave à convexe ou de convexe à concave.

3) Convexité et opérations

Propriété 1 : Soit f et g deux fonctions dérivables et **convexes** sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- La fonction $f + g$ est **convexe** sur I .
- Si $\lambda > 0$, la fonction λf est **convexe** sur I .
- Si $\lambda < 0$, la fonction λf est **concave** sur I .

Propriété 2 : Soit f et g deux fonctions dérivables et **concaves** sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- La fonction $f + g$ est **concave** sur I .
- Si $\lambda > 0$, la fonction λf est **concave** sur I .
- Si $\lambda < 0$, la fonction λf est **convexe** sur I .

III) Convexité et dérivées

1) Convexité et sens de variation de f'

Théorème : (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- f est **convexe** sur I si et seulement si f' est **croissante** sur I .
- f est **concave** sur I si et seulement si f' est **décroissante** sur I .

2) Convexité et signe de f''

Définition : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Si la dérivée f' de f est elle aussi dérivable sur I , on dit que f est deux fois dérivable sur I et on note f'' la dérivée de f' sur I .

f'' est appelée dérivée seconde de f .

Exemple :

$$\begin{aligned} 1. \quad f(x) &= 3x^2 - 3x + 1 \\ f'(x) &= 6x - 3 \\ f''(x) &= 6 \end{aligned}$$

Théorème :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

- f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I .
- f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I .

3) Point d'inflexion et dérivée seconde

Théorème : (admis)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f .

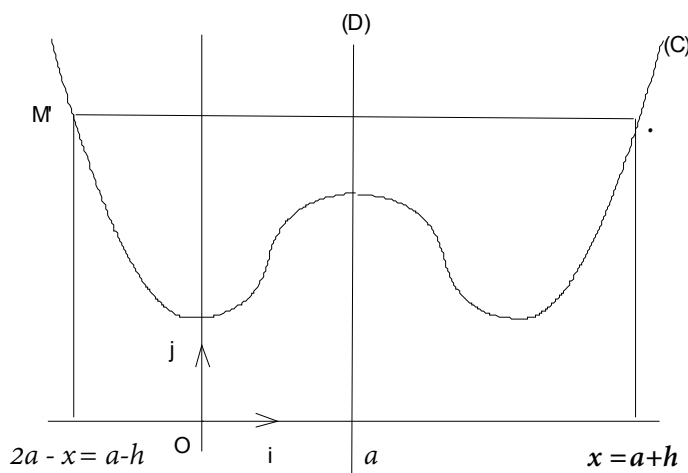
La courbe $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion au point $A(a; f(a))$ si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en a .

IV) Axe et centre de symétrie d'une représentation graphique de fonction.

Soit f une fonction définie sur l'ensemble D_f et qui est représentée graphiquement dans un repère or-

thogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par une courbe (C) .

Axe de symétrie



La droite (D) d'équation $x = a$ est axe de symétrie de (C) si et seulement si, pour tout $M \in (C)$, son symétrique M' par rapport à (D) appartient aussi à (C) . On traduit cela par l'une des deux propriétés équivalentes ci-dessous:

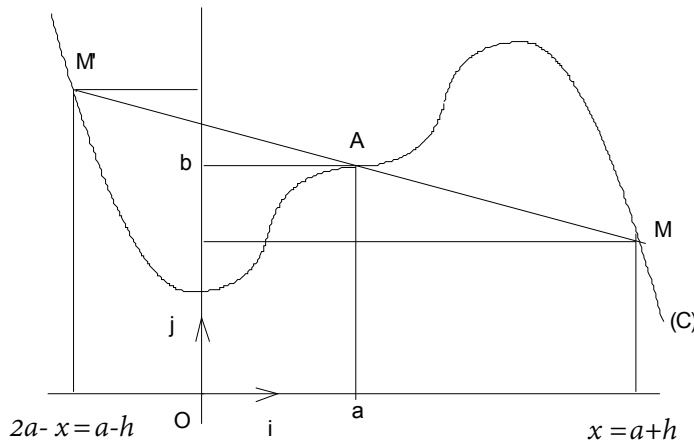
- Pour tout $x \in D_f$, on a:
 $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$

- Pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $a + h \in D_f$, on a:

$$\begin{aligned} a - h &\in D_f \text{ et} \\ f(a + h) &= f(a - h) \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $a = 0$, on retrouve la propriété du graphique d'une fonction paire: Axe de symétrie: axe des ordonnées.

Centre de symétrie



Le point A de coordonnées $(a; b)$ est centre de symétrie de (C) si et seulement si, pour tout $M \in (C)$, son symétrique M' par rapport à A appartient aussi à (C) . On traduit cela par l'une des deux propriétés équivalentes ci-dessous:

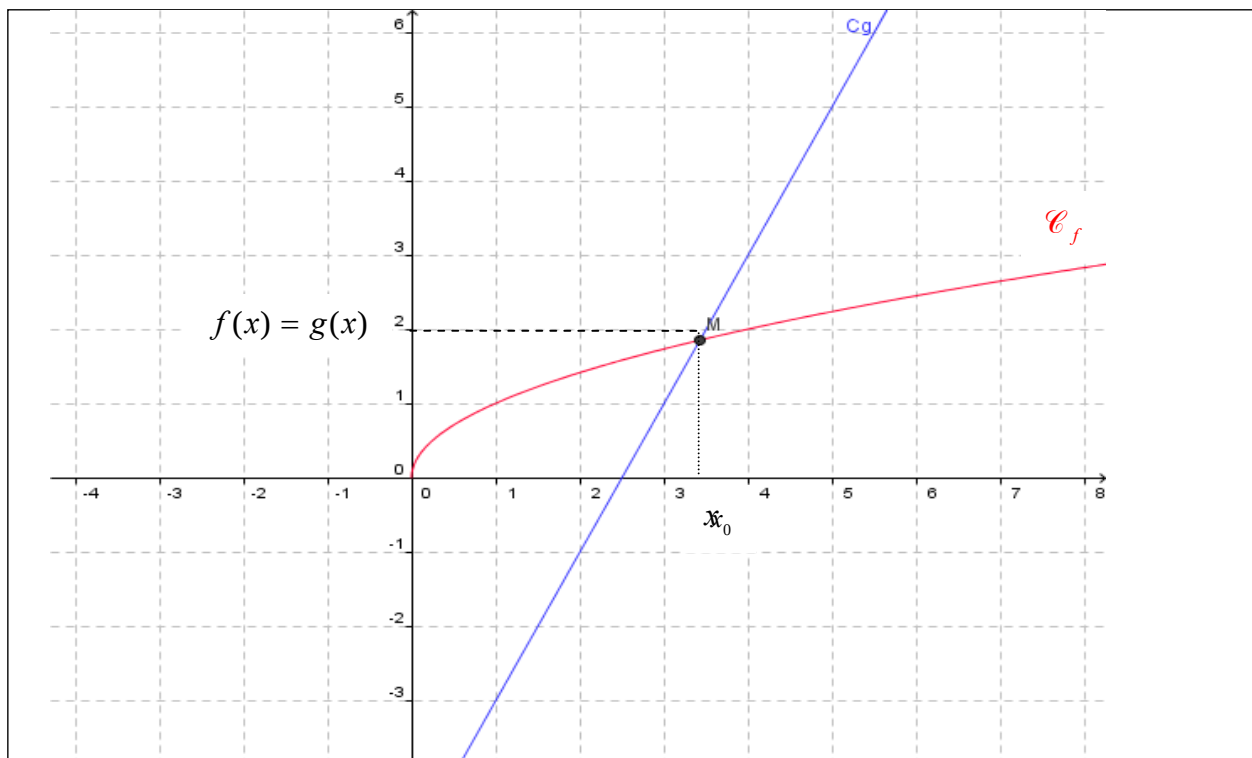
- Pour tout $x \in D_f$, on a:
 $2a - x \in D_f$ et
 $f(2a - x) + f(x) = 2b$
- Pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $a + h \in D_f$, on a:
 $a - h \in D_f$ et
 $f(a + h) + f(a - h) = 2b$

Dans le cas particulier où $a = b = 0$, on retrouve la propriété du graphique d'une fonction impaire: Centre de symétrie: origine O du repère.

V) Position relative de deux courbes

1. Principe

On considère deux fonction f et g définies sur leurs ensembles de définition. Soient $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives. On suppose que ces courbes ont des points d'intersection. Par exemple :



Soit x_0 l'abscisse du point d'intersection.

Graphiquement, on voit que :

- pour $x = x_0$, il y a intersection.
- pour $x > x_0$, la courbe de f est en dessous de celle de g
- pour $x < x_0$, la courbe de f est au dessus de celle de g

On peut dire également que :

- pour $x = x_0$, $f(x) = g(x)$
- pour $x > x_0$, $f(x) < g(x)$
- pour $x < x_0$, $f(x) > g(x)$

En fait, on doit "prévoir" par le calcul ce positionnement relatif des deux courbes.

Ceci revient donc à comparer les expressions $f(x)$ et $g(x)$

Or e, mathématiques, on utilise le principe suivant :

" pour comparer deux nombres, on étudie le signe de leur différence "

Par conséquent, pour étudier la position relative de deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, on étudie le signe de la différence $f(x) - g(x)$.

- Dans le cas où $f(x) - g(x) > 0$, on en déduit que $f(x) > g(x)$ et par conséquent $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$
- Dans le cas où $f(x) - g(x) < 0$, on en déduit que $f(x) < g(x)$ et par conséquent $\mathcal{C}_f$ au dessous de $\mathcal{C}_g$
- Dans le cas où $f(x) - g(x) = 0$, il y a intersection

2) Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = -x^2 - 4x - 3$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x - 6$ et $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Etudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

.....

pour étudier la position relative de deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, on étudie le signe de la différence $f(x) - g(x)$.

Pour tout réel x , $f(x) - g(x) = -x^2 - 4x - 3 - (-2x - 6) = -x^2 - 4x - 3 + 2x + 6 = -x^2 - 2x + 3$

On doit donc étudier le signe de ce trinôme

.....Ce trinôme admet pour racines $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$

D'où le tableau de signes et de conséquences :

x	$-\infty$	1	∞
Signe de la différence $f(x) - g(x)$	$-$	0	$-$
Conséquences	$\mathcal{C}_f$ en dessous de $\mathcal{C}_g$	$\mathcal{C}_f$ au dessus de $\mathcal{C}_g$	$\mathcal{C}_f$ en dessous de $\mathcal{C}_g$

Intersection

intersection