

الأعداد العقدية

I. تعاريف ومصطلحات:

1. مجموعة الأعداد العقدية: $\mathbb{C} = \{z = a + ib / (a, b) \in \mathbb{R}^2; i^2 = -1\}$.
2. كل عدد عقدي يكتب على شكل $z = a + ib$. العدد a يسمى الجزء الحقيقي $(R_e(z) = a)$ والعدد b يسمى الجزء التخيلي $(I_m(z) = b)$.
3. العدد $z = a + ib$ يسمى كذلك الشكل الجبري.
4. $z = a$ يسمى عددا حقيقيا $(z \in \mathbb{R})$. $z = ib$ يسمى تخيليا صرفا $(z \in i\mathbb{R})$.
5. خصائص الجمع والضرب والقوى في $\mathbb{R}$ تبقى صحيحة في $\mathbb{C}$.

II. الشكل الجبري:

لدينا $z = a + ib$ و $z' = a' + ib'$ عددين عقديين

- $z = z' \Rightarrow a = a' \text{ و } b = b'$
- $z \in \mathbb{R} \Rightarrow I_m(z) = 0 \Rightarrow b = 0$
- $z \in i\mathbb{R} \Rightarrow R_e(z) = 0 \Rightarrow a = 0$
- الشكل الجبري للمجموع: $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- الشكل الجبري للجداء: $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + b'a)$
- الشكل الجبري للمقلوب: $\frac{z'}{z} = \frac{a' + ib'}{a + ib} = \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2} + \frac{ab' - ba'}{a^2 + b^2}i$

المرافق:

1. العدد $z = a - ib$ يسمى مرافق العدد العقدي $z = a + ib$.
2. مرافق عدد حقيقي هو نفسه ومرافق عدد تخيلي هو مقابله.



3. خصائص :

$$z + \bar{z} = 2R_e(z) = 2a \quad ; \quad z - \bar{z} = 2I_m(z) = 2b$$

$$z \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \bar{z} \quad ; \quad z \in i\mathbb{R} \Rightarrow z = -\bar{z}$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad ; \quad \overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$$

$$\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n \quad ; \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$$

4. المعيار

معيار العدد العقدي $z = a + ib$ هو العدد الحقيقي الموجب $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

5. خصائص :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad ; \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad ; \quad |z| = |\bar{z}| = |-z|$$

$$|zz'| = |z||z'| \quad ; \quad |z^n| = |z|^n$$

III. الشكل المثلثي:

✓ المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م. $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ (o يسمى أصل المعلم . المحور $(o\vec{e}_1)$)

يسمى المحور الحقيقي والمحور $(o\vec{e}_2)$ يسمى المحور التخيلي .

✓ لحق النقطة $M(a, b)$ هو العدد العقدي $z = a + ib$ (نتكلم عن الصورة والحق)

✓ معيار عدد عقدي هو المسافة بين أصل المعلم والنقطة الممثلة

✓ عمدة عدد عقدي هي الزاوية بين المحور الحقيقي والنقطة الممثلة .

✓ $(a, b) \neq (0, 0)$; $z = a + ib$ و $\arg(z) = \theta$ و $\theta \in \mathbb{R}$; $\sin \theta = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z| \sin \theta$ ولدينا

$\cos \theta = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z| \cos \theta$ اذن الشكل المثلثي : $z = a + ib = [z](\cos \theta + i \sin \theta)$

يرمز للشكل المثلثي المختصر ب $[r, \theta]$ (r معيار و θ عمدة)

خصائص الشكل المثلثي:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{[r, \theta]} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right] \quad \text{و} \quad -z = [r, \theta + \pi] \quad \text{و} \quad zz' = [r, \theta][r', \theta'] = [rr', \theta + \theta']$$

$$iz = \left[r, \frac{\pi}{2} + \theta\right] \quad \text{و} \quad \bar{z} = [r, -\theta] \quad \text{و} \quad \frac{z}{z'} = \frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$$

(هذه الصيغة تسمى صيغة موافر) $[r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$



خصائص العمدة

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad ; \arg(z)^n = n \arg(z)$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad ; \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

IV- الشكل أو الترميز الآسي:

- الترميز أو الشكل الآسي: $z = a + ib = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z|e^{i\theta}$

صيغة أولير Euler . $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2i}$ و $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

(تستعمل صيغة أولير لاختطاط حدودية $\cos$ و $\sin$)

V - المعادلات وتقنيات الحلول:

❖ كل معادلة تكتب على شكل $az^2 + bz + c = 0$ تسمى **معادلة من الدرجة الثانية**, حيث a و b و c أعداد حقيقية.

❖ لحل هذه المعادلة نحسب المميز $\Delta = b^2 - 4ac$ وهناك حالتين:

❖ إذا كان $\Delta = 0$ فإن للمعادلة **حل مزدوج** $z = \frac{-b}{2a}$

❖ إذا كان $\Delta \neq 0$ فللمعادلة **حليين مختلفين** $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

❖ إذا كان Δ سالب فللمعادلة **حليين عقديين مترافقين**.

❖ مجموع الحليين $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$ و جذاء الجذرين $z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}$

❖ **تعميل الحدودية:** $\Delta \neq 0 \rightarrow a(z - z_1)(z - z_2)$ أو $(\Delta = 0) \rightarrow a(z - z')^2$

❖ **لحل معادلة من الدرجة الثالثة** يمكن اعتماد القسمة الاقليدية أو تساوي حدوديتين أو المتطابقات الهامة.



1. التاويلات الهندسية

معطيات هندسية	معطيات جبرية
A و B و C نقط مستقيمة	$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} = \alpha \in \mathbb{R}$
ABCD متوازي الأضلاع	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow Z_B - Z_A = Z_C - Z_D$
ABC مثلث متساوي الساقين في A	$AB = AC \Leftrightarrow Z_B - Z_A = Z_C - Z_A $ أو $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = [1; \theta]$
ABC مثلث قائم الزاوية في A	$BC^2 = AB^2 + AC^2$ $ Z_C - Z_B ^2 = Z_B - Z_A ^2 + Z_C - Z_A ^2$ $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \left[r; \pm \frac{\pi}{2} \right]$
ABC مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{2} \right]$
ABC مثلث متساوي الأضلاع	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{3} \right]$
$M \in \zeta(A; r)$	$ z - z_A = r$
M تنتمي إلى واسط القطعة [AB]	$ z - z_A = z - z_B $
M منتصف القطعة [AB]	$z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$
$(AB) \perp (CD)$	$\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$

2. مجموعة النقط

لدراسة أو تحديد مجموعة النقط نعتمد على الخصائص التالية

$$z = x + iy \quad \text{مع} \quad Z \cdot \bar{Z} = x^2 + y^2 \quad \text{أو} \quad Z - \bar{Z} = 2yi \quad \text{أو} \quad Z + \bar{Z} = 2x$$

3. الكتابة أو التمثيل العقدي

الدوران	التحريك	الإزاحة	التحويل
$r(\Omega; \theta)$	$h(\Omega; k)$	$T_{\bar{u}}$	الرمز
المركز Ω والزاوية θ	المركز Ω والنسبة k	المتجه $\bar{u}$	المميزات
$z' = z_{\Omega} + e^{i\theta}(z - z_{\Omega})$	$z' = z_{\Omega} + k(z - z_{\Omega})$	$z' = z + z_{\bar{u}}$	الكتابة العقدية أو التمثيل العقدي

